UNIDAD DIDÁCTICA: SUCESIONES. PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

MASTER UNIVERSITARIO EN PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS. ESPECIALIDAD: MATEMÁTICAS

Universidad de Granada

Este trabajo fin de máster ha sido elaborado por:
PABLO JESÚS DEL MORAL GUZMÁN
Bajo la supervisión:
Dr. D. PABLO FLORES MARTÍNEZ
Tutora Instituto: Mª MAR MARTÍNEZ MARTÍNEZ
Curso: 2011-2012

Índice

1. INTRODUCCIÓN

Con este Trabajo Fin de Máster (TFM) se pretende realizar una Unidad Didáctica sobre Sucesiones, Progresiones Aritméticas y Geométricas destinada a los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Recordemos que esto es una unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos (Rico y Segovia, 2007). Cesar Coll (2009), Catedrático de Psicología Evolutiva y de la Educación de la Universidad de Barcelona, indica que la programación concreta las intenciones de los profesores respecto al qué enseñar, cuándo enseñar, cómo enseñar y qué y cuándo evaluar.

La hemos estructurado en tres apartados, el primero contempla la aportación de la revisión curricular y la justificación del estudio; el segundo en un Análisis Didáctico: Análisis de Contenido, Análisis Cognitivo y Análisis de Instrucción; y el tercero una propuesta de Unidad Didáctica.

Con la realización del análisis de contenido estudiaremos el tema desde un punto de vista histórico, para intentar dar respuesta a porqué surgieron las Sucesiones y Progresiones, y qué se pretendía solventar. Después, trataremos los contenidos del tema desde el punto de vista conceptual y procedimental, así como las relaciones principales que existen entre ellos, para poder decidir cuales de estos contenidos son los que queremos desarrollar dentro de la unidad didáctica. Asimismo, veremos cuales son las principales formas de representar los contenidos que hemos estudiado anteriormente. Y finalmente intentaremos ver a que fenómenos da respuesta.

En segundo lugar, con el análisis cognitivo fijaremos las expectativas que pretendemos superar con esta unidad, así como las principales dificultades y limitaciones que pensamos que pueden darse cuando los estudiantes se enfrentan a los contenidos previamente expuestos en el análisis anterior.

Dentro del análisis de instrucción, intentaremos diseñar las tareas, ordenarlas y analizarlas para que se adapten a las necesidades del alumnado y para darnos cuenta si realmente nos ayudan a lograr los objetivos y detectar los errores expuestos en el análisis cognitivo. Además, intentaremos analizar la coherencia de la secuenciación propuesta en lo que se refiere al nivel de dificultad de las tareas, a la finalidad que tiene cada una de ellas y a la distribución en las distintas sesiones que conformarán el período de puesta en práctica de la unidad.

Y en la propuesta de Unidad Didáctica estudiaremos los Objetivos, Contenidos específicos de la unidad, Metodología, Secuenciación y Organización de las Tareas, Evaluación de aprendizaje, así como la atención a la diversidad.

En el punto quinto expondremos unas conclusiones, así como nuestro punto de vista del resultado final obtenido.

Y para finalizar, encontramos la bibliografía donde aparecen recogidos todos los documentos consultados para la elaboración de este trabajo.

2. FUNDAMENTACIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

Para comenzar este apartado nos remitimos a la idea de "Currículo". Así, la LOE (Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación) lo define como el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas en ella.
El análisis didáctico, como una herramienta para el diseño de unidades didácticas, se articula en torno a los organizadores del currículo.

Un currículo es una propuesta de actuación educativa, que en el caso de las matemáticas, puede considerarse como un "plan de formación en matemáticas para los niños, jóvenes y adultos que tiene lugar en el sistema educativo de un país" (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 34). Como elemento que relaciona la organización y legislación educativas con la actividad docente del profesor, un currículo, como plan formativo, ha de atender a cuatro cuestiones centrales (Rico, 1997):

1. ¿Qué formación? ¿Con cuál conocimiento?
2. Esa formación, ¿para qué? ¿Qué aprendizaje persigue?
3. ¿Cómo llevar a cabo la formación?
4. ¿Cuánta fue la formación? ¿Qué resultados se obtuvieron?

Estas cuestiones darán lugar a una diferenciación en cuatro dimensiones: dimensión cultural y conceptual, dimensión cognitiva, dimensión ética o formativa y dimensión social.
Además de la distinción de estas dimensiones, L. Rico (1997) distinguirá diferentes grados a los que puede ser tratada cada una de ellas dependiendo de las personas que intervengan o de la profundidad con la que se traten. Así, tendremos los siguientes niveles: teleológico o de los fines, de las disciplinas académicas, del sistema educativo y de la planificación para los profesores.

Y volviendo al currículo, las recientes orientaciones y directrices curriculares basadas en los informes PISA han retomado la visión funcional de las matemáticas:

"El desarrollo de la competencia matemática (…) supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas adecuadas e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para obtener conclusiones, reducir la incertidumbre y para enfrentarse a situaciones cotidianas de diferente grado de complejidad". (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b, p. 31689).

Por lo tanto, desde el punto de vista de la actividad docente del profesor, este enfoque funcional del currículo requiere de un diseño cuidado y detallado de las matemáticas escolares de cara al aprendizaje de los escolares; sobre todo porque, a diferencia de otros enfoques, no toma como hilo conductor de la planificación la secuencia tradicional o lógica del propio contenido. Lupiáñez (2009).

Por tanto, esta unidad didáctica se ubica en el nivel de planificación para los profesores, tomando decisiones sobre contenido (dimensión cultural), objetivos y competencias (dimensión cognitiva), metodología (dimensión formativa) y evaluación (dimensión social).
Los elementos básicos que integran el currículo sobre los que hay que tomar decisiones previas en una programación de la enseñanza son los siguientes:
1. *Objetivos y competencias básicas*. Metas de progresiva dificultad que se marca a los alumnos en función de su nivel de competencia y en función de los resultados del aprendizaje que se debe esperar de ellos.
2. *Contenidos*. Elementos conceptuales y culturales que se van a enseñar: conceptos, procedimientos y actitudes.
3. *Metodología*. Modelos de enseñanza, enfoques prácticos, actividades y tareas concretas que se van a realizar.
4. *Evaluación*. Procesos, criterios e instrumentos previstos para la valoración de los resultados obtenidos, en relación con la consecución de los objetivos y de la adquisición de las competencias básicas.

Existen tres niveles de concreción curricular caracterizados por las tomas de decisiones sobre los elementos básicos del currículo (objetivos, competencias básicas en su caso, contenidos, secuencia, metodología y evaluación):

* *Aspectos básicos del currículo y enseñanzas mínimas*. Es el primer nivel de concreción. Corresponde a los poderes legislativos y de gobierno del estado. Dado que las comunidades autónomas tienen competencias plenas en materia educativa, corresponde en Andalucía, por tanto, al parlamento andaluz, que elabora las leyes educativas básicas y a la administración educativa andaluza que las desarrolla mediante decretos y normas.

* *Proyecto educativo*. Es el segundo nivel de concreción. Corresponde al centro escolar, a su profesorado organizado en equipos educativos y departamentos didácticos, y al alumnado y las familias que tienen representación en los órganos colegiados de control y gobierno del centro.
* *Programación de aula*. Es el tercer nivel de concreción. Corresponde al docente elaborar la programación de aula y las unidades didácticas que la integran.

La estructura de esta unidad didáctica se basa en la teoría del análisis didáctico, centrado en la actividad del profesor como responsable del diseño, implementación y evaluación de temas de la matemática escolar y que propone cuatro componentes: el *análisis de contenido*, el *análisis cognitivo*, el *análisis de instrucción* y el *análisis de actuación*. Los tres primeros análisis se ocupan del diseño, mientras que el análisis de actuación se centra en la puesta en práctica, implementación y la posterior evaluación de los resultados obtenidos.

1. *En el análisis de contenido*, situado en la dimensión cultural y conceptual del currículo, el profesor identifica, selecciona y organiza los significados de los conceptos y procedimientos de un tema matemático que considera relevantes a efectos de su planificación como contenidos escolares aptos para la instrucción.
2. *El análisis cognitivo*, ubicado en la dimensión cognitiva del currículo, aborda la problemática del aprendizaje de ese tema matemático por parte de los escolares.
3. *En el análisis de instrucción*, el profesor selecciona, diseña y secuencia las tareas que empleará en la instrucción para lograr las expectativas de aprendizaje que ha concretado anteriormente. También analiza los diferentes materiales y recursos que podrá emplear en sus clases y delimita los criterios y los instrumentos de evaluación.

4. *El último de los análisis,* el de actuación, se lleva a cabo después de implementar la unidad didáctica y le sirve al profesor para recabar información acerca de: la medida en que se han logrado las expectativas de aprendizaje establecidas, la funcionalidad de las tareas empleadas o la bondad de las herramientas de evaluación puestas en juego. Esta información es útil de cara a la próxima implementación de la unidad diseñada o al inicio de la planificación del tema siguiente.

3. ANÁLISIS DIDÁCTICO DEL TEMA: SUCESIONES. PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

El análisis didáctico, como hemos visto en el capitulo anterior, se estructura y articula en torno a cuatro análisis distintos, cada uno correspondiente con una de las dimensiones del currículo. Así nos encontramos con el análisis de contenido (dimensión cultural y conceptual), el análisis cognitivo (dimensión cognitiva), el análisis de instrucción (dimensión ética o formativa) y el análisis de actuación (dimensión social).

3.1 ANÁLISIS DE CONTENIDO

El análisis de contenido nos ofrece una descripción estructurada de los diferentes significados de los conceptos y procedimientos de un tema desde la perspectiva de su estructura conceptual, sus sistemas de representación, su análisis fenomenológico y su evolución histórica.

3.1.1 DESARROLLO HISTÓRICO

INTRODUCCIÓN

La producción matemática más antigua de la que tenemos constancia nos muestra que, desde tiempos remotos, ha existido interés por estudiar ciertas "colecciones de números" (lo que hoy llamamos *sucesiones*) y sus propiedades.

Entre estas sucesiones, unas de las primeras en estudiarse fueron aquellas en las que cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo: son las que llamamos *progresiones geométricas.*

Las progresiones constituyen el ejemplo más sencillo del concepto de sucesión. Desde los albores de la historia de las matemáticas se han estudiado sus propiedades, y éstas han sido aplicadas, sobre todo, a la aritmética comercial.

El estudio de las progresiones aritméticas es paralelo al de las geométricas por cuanto las propiedades de estas últimas emanan de las primeras sin más que convertir las sumas en productos, diferencias en cocientes, y el producto por un número natural en una potencia de exponente natural.

EL ORIGEN de las progresiones, al igual que el de tantas otras ramas de las matemáticas, es incierto. No obstante, se conservan algunos documentos que atestiguan la presencia de progresiones varios siglos antes de nuestra era, por lo que no se debe atribuir su paternidad a ningún matemático concreto.

Es conocido el problema de calcular en cuánto tiempo se doblaría una cantidad de dinero a un determinado interés compuesto, propuesto por los **babilonios** (2000 a.C. - 600 a.C.), lo cual hace pensar que conocían de alguna manera la fórmula del interés compuesto y, por tanto, las progresiones geométricas.

Las tablillas de arcilla de la época babilónica (2000 aC) muestran que los babilonios estudiaron las progresiones geométricas y ya habían hallado la suma de los términos de una progresión geométrica en problemas concretos, llegando a establecer la fórmula:

$$1+2+2^2 + \ldots +2^9 = 2^{10} -1$$

También pueden encontrarse problemas relacionados con progresiones en **papiros egipcios**. De igual modo, las progresiones aparecen también en la cultura árabe, a veces ligadas a leyendas como la de la recompensa al inventor del ajedrez:

Leyenda de la recompensa imposible

Una de estas leyendas nos sitúa su nacimiento en la India, más concretamente en el Valle del Indo, y data del siglo VI d. C. Nos cuenta que el inventor del ajedrez fue un brahmán llamado Sissa Ben Dari, que lo creó para distracción y ocio de un rey, y fue tal el éxito que alcanzó entre los miembros de la corte, que el rey le concedió al inventor la posibilidad de elegir la recompensa que quisiera.

El brahmán, para darle al rey una lección de humildad, solicitó que le fuera concedido un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera y seguir así doblando la cantidad hasta totalizar las 64 casillas del tablero.

En un principio, el rey se rió de él por lo poco que pedía y por lo mucho que podría haberle dado. Pero esa sonrisa burlona no le duró mucho tiempo, ya que pronto sus consejeros le advirtieron de que lo que le había pedido el inventor no se lo podían conceder, pues no había granos suficientes en todo el reino, ya que la cifra ascendía a 18.446.744.073.709.551.615 granos de trigo, los cuales tardarían en ser recogidos 1.173.055.797 siglos.

Esta leyenda continúa narrando que el rey y su corte se quedaron estupefactos ante los cálculos estimados, y éste, por primera vez, se veía ante la imposibilidad de cumplir una promesa. Acto seguido, Sissa renunció públicamente a su pedido y llamó la atención del monarca con estas palabras: «Los hombres más precavidos eluden no sólo la apariencia engañosa de los números, sino también la falsa modestia de los ambiciosos (...). Infeliz de aquel que toma sobre sus hombros los compromisos de honor por una deuda cuya magnitud no puede valorar por sus propios medios. Más previsor es el que mucho pondera y poco promete». Estas inesperadas y sabias palabras quedaron profundamente grabadas en el espíritu del rey, el cual, olvidando la montaña de trigo que le prometió al joven brahmán, lo nombró su primer ministro.

Las Matemáticas en el Antiguo Egipto. Progresiones Aritméticas y Geométricas. El Papiro Rhind

El Papiro Rhind

En 1858 el egiptólogo escocés A. Henry Rhind visitó Egipto por motivos de salud (padecía tuberculosis) y compró en Luxor el papiro que actualmente se conoce como papiro Rhind o de Ahmes, encontrado en las ruinas de un antiguo edificio de Tebas. Rhonda murió 5 años después de la compra y el papiro fue a parar al Museo Británico. Desgraciadamente en esa época gran parte del papiro se había perdido, aunque 50 años después se encontraron muchos fragmentos en los almacenes de la Sociedad histórica de Nueva York. Actualmente se encuentra en el Museo Británico de Londres. Comienza con la frase "Cálculo exacto para entrar en conocimiento de todas las cosas existentes y de todos los oscuros secretos y misterios"

El papiro mide unos 6 metros de largo y 33 cm de ancho. Representa la mejor fuente de información sobre matemática egipcia que se conoce. Escrito en hierático, consta de 87 problemas y su resolución. Nos da información sobre cuestiones aritméticas básicas, fracciones, cálculo de áreas, volúmenes, progresiones, repartos proporcionales, reglas de tres, ecuaciones lineales y trigonometría básica. Fue escrito por el escriba Ahmes (antiguamente, se llamaba escribano al que por oficio público estaba autorizado para dar fe de las escrituras y demás actos que se desarrollaban ante él) aproximadamente en el año 1650 a.C a partir de escritos de 200 años de antigüedad, según reivindica el propio Ahmes al principio del texto, aunque nos resulta imposible saber qué partes corresponden a estos textos anteriores y cuáles no.

Se conoce muy poco sobre el objetivo del papiro. Se ha indicado que podría ser un documento con claras intenciones pedagógicas, o un cuaderno de notas de un alumno. Para nosotros representa una guía de las matemáticas del Antiguo Egipto, pues es el mejor texto escrito en el que se revelan los conocimientos matemáticos. En el papiro aparecen algunos errores, importantes en algunos casos, que pueden deberse al hecho de haber sido copiados de textos anteriores. Aunque en la resolución de los problemas aparecen métodos de cálculo basados en prueba y error, sin formulación y muchas veces tomadas de las propias experiencias de los escribas, representa una fuente de información valiosísima.

En cuanto al autor, poco se conoce de él. Por su escritura parece que Ahmes no era un simple escriba, pero se desconocen los detalles de su educación.

A continuación doy la resolución de algunos de los problemas de Progresiones aritméticas y geométricas del papiro, tal y como aparecen en el original.

Problema 64

Progresión aritmética.

Divide 10 hekat de cebada entre 10 hombres de manera que la diferencia entre cada hombre y el siguiente sea 1/8 de hekat. ¿Qué parte le corresponde a cada hombre?

Si aplicamos la formulación actual para progresiones aritméticas tenemos que si a_i son los n términos de la progresión, d la diferencia y S la suma:

$S = (a_1 + a_n)*n/2 \to a_n = S/n + (n-1) * (d/2)$

Así es, exactamente, como lo resuelve Ahmes, no sabemos si por propio razonamiento lógico o aplicando una formulación conocida. Hace:

- El número de diferencias es 9, una menos que el número de hombres.
- Multiplica este número por la mitad de la diferencia (1/16). 9*1/16 = 1/2 + 1/16
- Suma este resultado al promedio de las partes 1 +1/2 + 1/16
- Para obtener las partes restantes resta sucesivamente la diferencia 1/8 a esta cantidad. Se obtiene:

1+1/2+1/16, 1+1/4+1/8+1/16, 1+1/4+1/16, 1+1/8+1/16, 1+1/16, 1/2+1/4+1/8+1/16, 1/2+1/4+1/16, 1/2+1/8+1/16, 1/2+1/16, 1/4+1/8+1/16. Si sumamos todos los términos obtenemos precisamente 10.

Problema 79

Progresiones geométricas.

Este es el único problema sobre progresiones geométricas en el Antiguo Egipto que nos es conocido, además del primer ejemplo de matemática recreativa del que se tiene noticia. Se trata de una progresión geométrica en la que el primer término es 7 y la razón también 7, pero planteado de una forma extraña. En el problema se dice " 7 casas, 49 gatos, 343 ratones, 2401 espigas de trigo, 16807 medidas de grano". Hay que suponer que Ahmes se refería a un problema, posiblemente ya conocido, en el que en cada casa hay 7 gatos, cada uno de los cuales se come 7 ratones, cada uno de los cuales se ha comido 7 espigas de grano, cada una de las cuales había producido 7 hekat de grano. Ahmes aquí no sólo da la cantidad de hekat de grano ahorrado sino que además da la suma del número de casas más gatos, más ratones, más espigas más hekat. Realmente es difícil interpretar el objetivo del escriba con este problema, pues la suma de todos los términos no es un objetivo lógico. Lo que si parece constituir este problema es la base de la canción infantil:

Según iba a St. Ives
encontré a un hombre con 7 esposas
cada esposa tenía 7 sacos,
cada saco tenía 7 gatos,
cada gato tenía 7 gatitos
Gatitos, gatos, sacos y esposas.
¿Cuántos iban a St. Ives?

Un problema que ha resultado interesante de los matemáticos del Antiguo Egipto es:

Lados en progresión aritmética

La semi-sección meridiana de la Gran Pirámide es un triángulo rectángulo cuyos lados son proporcionales a los números 1, en la base, la raíz cuadrada del número áureo, para la altura, y el número áureo para la hipotenusa, que corresponde a la apotema de la pirámide. Este triángulo es el único que tiene sus lados en progresión geométrica y el que hace posible que se cumpla matemáticamente la propiedad enunciada por Heródoto: que el cuadrado de la altura de la pirámide es igual a la superficie de una cara. La segunda pirámide de Guiza, también conocida como la pirámide de Kefrén, tiene un semi-triángulo meridiano proporcional al triángulo sagrado egipcio (3, 4, 5), el único que tiene a sus lados en progresión aritmética.

Dicho triángulo tiene la base proporcional a 3 y la altura a 4. Esto hace que la pirámide de Kefrén, más pequeña que la Gran Pirámide, se vea como más alta e importante. Las dos afirmaciones acerca de los triángulos con lados en progresiones aritmética y geométrica de sus lados fueron demostradas por W. A. Price, en The Field, Londres, según afirma Matila Ghyka. La pirámide Norte de Dahshur, la tercera del grupo, se semi-secciona en el triángulo rectángulo proporcional al triángulo (20, 21, 29).

Los *Elementos* de Euclides es la obra matemática por excelencia, una compilación y sistematización de los conocimientos matemáticos de la Antigüedad y un clásico entre los clásicos. **Euclides de Alejandría** (c. 365-275 a C), con precisión y elegancia, siguiendo las reglas de la lógica, compuso todo un cuerpo de proposiciones matemáticas a partir de un pequeño grupo previamente establecido de definiciones y axiomas.

De Euclides sabemos muy poco, probablemente fue educado en Atenas, en la Academia de Platón, el principal de los centros matemáticos del siglo IV a.C., después marchó a la Alejandría de los Ptolomeos donde florecieron las ciencias y la literatura amparadas por los sucesores de Alejandro Magno. Los "Elementos" fueron dedicados a Ptolomeo I Soter quien se supone fundó la célebre Biblioteca de Alejandría.

En el libro IX de *Los Elementos* de Euclides, aparece escrita una fórmula, semejante a la actual, de la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica. Este Libro IX es una especie de miscelánea aritmética. Encontramos como primicia la moderna resolución unívoca de un número en sus factores primeros y el Teorema que establece la cantidad infinita de los números primos. Encontramos también teorías de origen pitagórico que hablan de números pares, impares y sus relaciones. Destacamos la Proposición 23. Si se suman tantos números impares como se quiera y su cantidad es impar, también el total será impar.

Bhaskara, matemático hindú del siglo XII, plantea en su más conocida obra, el *Lilavati* diversos problemas sobre progresiones aritméticas y geométricas. Nació en torno al año 1114 y fue el matemático hindú más prestigioso de su tiempo. La reputación alcanzada por sus obras fue tan grande que sus manuscritos se estuvieron copiando durante siglos.

Sus tres principales obras fueron: **Lilavati**, **Bijaganita**, y **Siddhanta Shiromani**.

La primera es un tratado de aritmética, *la segunda* se refiere a cuestiones de álgebra, incluye métodos de resolución de ecuaciones de primer y segundo grado y algunas de tercer y cuarto grado, *y la última* es una obra de astronomía en la que demuestra sus conocimientos de trigonometría al incluir una tabla de senos y las relaciones entre diferentes funciones trigonométricas.

En el año 1587 el poeta cortesano Fyzi tradujo el Lilavati al persa incluyendo una leyenda que ha pasado a la historia de las matemáticas como la **leyenda de Lilavati.**

El Lilavati es un tratado de aritmética con cerca de 270 problemas enunciados de una forma poética, donde podemos encontrar operaciones con números naturales, ecuaciones de primero y segundo grado, reglas de tres, combinaciones y permutaciones, *progresiones*, el teorema de Pitágoras... Veamos un ejemplo:

Hemos de destacar la sucesión de Fibonacci dentro de la historia de las sucesiones y progresiones.

La sucesión de Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144....

Los números de Fibonacci $f_0, f_1, f_2, f_3, \cdots$ quedan definidos por las ecuaciones

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n = 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Razón Aúrea: También Kepler describió los números de Fibonacci, y el matemático escocés Robert Simon descubrió en 1753 que la relación entre dos números de Fibonacci sucesivos f_{n+1} / f_n se acerca a la relación aúrea *fi* (ϕ) cuanto más se acerque a infinito; es más: el cociente de dos términos sucesivos de toda sucesión recurrente de orden dos tiende al mismo límite

Leonardo de Pisa, Fibonacci, nombre con el que pasará a la Historia, aprovechó sus viajes comerciales por todo el mediterráneo, Egipto, Siria, Sicilia, Grecia..., para entablar contacto y discutir con los matemáticos más notables de la época y para descubrir y estudiar a fondo los Elementos de Euclides, que tomará como modelo de estilo y de rigor.

De su deseo de poner en orden todo cuánto había aprendido de aritmética y álgebra, y de brindar a sus colegas comerciantes un potente sistema de cálculo, cuyas ventajas él había ya experimentado, nace, en **1202**, el **Liber abaci**, *la primera suma matemática de la Edad Media.*

En él aparecen por primera vez en Occidente, las nueve cifras hindúes y el signo del cero. Leonardo de Pisa brinda en su obra reglas claras para realizar operaciones con estas cifras tanto con números enteros como con fracciones, pero también proporciona la regla de tres simple y compuesta, normas para calcular la raíz cuadrada de un número, así como instrucciones para resolver ecuaciones de primer grado y algunas de segundo grado.

La sucesión fue descrita por Fibonacci como la solución a un problema de la cría de conejos: "*Cierto hombre tenía una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y uno desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando es su naturaleza parir otro par en un simple mes, y en el segundo mes los nacidos parir también*".

De esta manera Fibonacci presentó la sucesión en su libro Liber Abaci.. Muchas propiedades de la sucesión de Fibonacci fueron descubiertas por Édouard Lucas, responsable de haberla denominado como se la conoce en la actualidad. Además, las sucesiones de Fibonacci aparecen en infinidad de objetos de la naturaleza: Si se observa un árbol, en la primera parte hay un tronco, le sigue, en la segunda, una parte más fina, en la tercera, dos ramas, en la cuarta, tres, luego cinco y ¡Fibonacci presente!. La mano humana es, también, una sucesión de Fibonacci. La longitud del metacarpo es la suma de las dos falanges proximales; la longitud de la primera falange es la suma de las dos falanges distales. Las aplicaciones de los números de Fibonacci son también, al parecer, infinitas: se utilizan en generación de números al azar, en la búsqueda de valores máximos y mínimos de funciones complejas de las que se ignora la derivada, en trabajos de clasificación de datos, en recuperación de información en computadoras, y mil etcéteras más.

Esta serie ha tenido popularidad en el siglo XX especialmente en el ámbito musical, en el que compositores con tanto renombre como Béla Bartók, Olivier Messiaen y Delia Derbyshire la han utilizado para la creación de acordes y de nuevas estructuras de frases musicales.

En épocas más recientes (s. XVII - XVIII), el estudio de las progresiones y de su suma aparece relacionado con la aproximación de números irracionales o de funciones.

LEIBNIZ

Gotfried Wilhem Leibniz (1646-1716) era hijo del vice-presidente de la facultad de filosofía de la universidad de Leipzig. De joven, estudió filosofía, derecho y lenguas clásicas. Su principal interés estuvo centrado en desarrollar una especie de lenguaje simbólico para representar los conceptos fundamentales del pensamiento humano y las maneras de combinar estos símbolos para llegar a conceptos más elaborados. Esta idea filosófica, que tiene relación con la combinatoria, fue ya algo en parte elaborada por franciscano mallorquín Ramón Llull (1235-1316) en su *Arte Luliano*.

Poco después de acabar sus estudios, Leibniz empezó en 1672 una misión diplomática en Paris donde permanecería unos cuatro años hasta 1676. Allí conoció a numerosos filósofos y miembros de la alta sociedad, en particular al holandés C. Huygens (1629-1695), entonces miembro de la recién creada Académie Royale des Sciences. Como curiosidad Huygens le planteó a Leibniz que hallara la *suma de los inversos de los números triangulares*. *Mediante sumas y diferencias Leibniz fue capaz de hallar la suma de esta serie* y entonces creció su interés en estudiar matemáticas, cuya formación hasta entonces había sido muy escasa. Huygens le recomendó que leyera la renovada edición en latín de van Schooten de la *Géometrie* de Descartes y los trabajos de Pascal. La entrada matemática de Leibniz fue entonces impresionante, ya que le llevó al descubrimiento del cálculo en 1675 y su elaboración y publicación en dos cortos artículos del *Acta Eruditorum* después en 1684 y 1686, el primero sobre cálculo diferencial y el segundo sobre cálculo integral.

El trabajo de Leibniz se conoce principalmente por los numerosos artículos que publicó en *Acta* y por sus cartas personales y manuscritos que se conservan en Hannover. Entre estos documentos están los manuscritos fechados el 25, 26 y 29 de Octubre y el 1 y 11 de Noviembre de 1675 donde Leibniz estudia la cuadratura de curvas y desarrolla su cálculo diferencial e integral.

Uno de los ingredientes fundamentales del cálculo de Leibniz son las reglas para la manipulación de los símbolos "$\int$" y "d" de la integral y la diferencial. Esto refleja sus ideas filosóficas de buscar un lenguaje simbólico y operacional para representar los conceptos e ideas del pensamiento de tal manera que los razonamientos y argumentos se puedan escribir por símbolos y fórmulas. En matemáticas su cálculo es en parte esto, un algoritmo para escribir los métodos geométricos de cuadraturas y tangentes por medio de símbolos y fórmulas. *Las otras dos ideas fundamentales del cálculo de Leibniz son la relación entre la sumas de sucesiones con las diferencias de sus términos consecutivos y el llamado triángulo característico.*

En su obra *De Arte Combinatoria* (Sobre el arte de las combinaciones) de

1666, dedica bastante espacio al estudio de *las sucesiones y las series* y hace un estudio sistemático de las propiedades de las combinaciones y permutaciones. Alrededor del año 1672, trabajaba sobre las diferencias sucesivas de progresiones aritméticas del tipo

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ Observó que las diferencias sucesivas de los términos:

$d_1, d_2, \dots, d_n$ definidas por: $d_i = a_i - a_{i-1}$ cumplían la siguiente propiedad:

$d_1+d_2+ \cdots +d_n = (a_1-a_0)+(a_2-a_1)+ \cdots +(a_n-a_{n-1})=a_n-a_0$.

Una serie de este tipo, hoy se conoce como serie telescópica.

Se sigue de aquí que la suma de las diferencias de una sucesión es la diferencia entre el primero y el último término de la progresión. De esta elemental propiedad, Leibniz encuentra todas las propiedades que los *pitagóricos* hallaron a través del álgebra geométrica, como son la suma de los números impares, de los pares, de los cuadrados, etc. Y va más allá cuando extiende la propiedad a sumas infinitas, al encontrar que:

$\Sigma\ bi = ai$ Donde la sucesión $b\,i$ es decreciente y está definida por $bi = (a\,i - a\,i{+}1)$ $i = 1, 2, 3, \dots$

París fue su mayor experiencia. Allí recibió la benéfica influencia del científico holandés Christian Huygens (1629-1695), quizá el científico más prestigioso de Europa por esa época, quien en una ocasión le puso como reto, el cálculo de la serie:

$1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + 1/15 + 1/21 + 1/28 + 1/36 + 1/45 + \dots$

Donde los sumandos son los inversos de los números triangulares, o sea, aquellos que resultan de la suma de los primeros naturales, en su orden 1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, etc. Leibniz convierte esta serie en otra más digerible.

$1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + 1/15 + 1/21 + \dots$

$= 2[1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20 + 1/30 + 1/42 + \dots]$

$= 2[(1- 1/2) + (1/2-1/3) + (1/3-1/4) + (1/4-1/5) + (1/5-1/6) + \dots]$

$= 2[1] = 2.$

Esta serie se convierte en telescópica usando transformaciones simples. En efecto, la suma de los primeros k números naturales es, $k(k+1)/2$. Pero $1/[k\,(k+1)] = 1/k - 1/(k+1)$. A este resultado se llega usando fracciones parciales, tema común, cuando se trata de integrar funciones racionales. Usando la notación para series, la suma de Leibniz se reduce a:

$\Sigma\ 2 / k\,(k+1) = 2\ \Sigma\ [\,1/ k - 1/ k+1\,] = 2\,[1 - 1/n+1].$

Como se vio arriba, Leibniz ya tenía la fórmula para calcular estas sucesiones decrecientes. Cuando $n \to \infty$, el miembro de la izquierda se convierte en una serie infinita y el miembro de la derecha va a 2(1) =2.

La serie anterior fue como un bautizo de ingreso para Leibniz al seno de las matemáticas. Fascinado con las series, siguió explorando su comportamiento y fue a través de ellas que llegó a inventar el cálculo.

CAUCHY

Hemos de hablar de Cauchy por sus grandes aportaciones a las sucesiones y series.

Augustin Louis Cauchy (París, 21 de agosto de 1789- Sceaux, 23 de mayo de 1857) fue un matemático francés.

Cauchy fue pionero en el análisis matemático y la teoría de grupos de permutaciones, contribuyendo de manera medular a su desarrollo. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática.

Cauchy empezó a educarse tempranamente con su padre Louis François Cauchy (1760-1848) quien ocupó varios puestos públicos menores y era amigo de Joseph-Louis de Lagrange y Pierre Simon Laplace.

3.1.2 ESTRUCTURA CONCEPTUAL

La estructura conceptual es el primer organizador del tema que vamos a considerar en nuestro estudio. Dentro de esta estructura, diferenciaremos dos grandes campos de conocimiento matemático: el conceptual y el procedimental.

CAMPO CONCEPTUAL: En el que encontraremos los elementos más básicos del conocimiento matemático relacionados con el tema que es objeto de estudio.

Podemos distinguir tres niveles o tipos de conocimiento que irán aumentando en complejidad, y que son: los hechos (unidades de información), los conceptos (conjuntos de unidades de información) y las estructuras conceptuales (sistemas interconectados de conceptos junto con sus relaciones.

HECHOS:

Términos:

- Número real
- Sucesión
- Término
- Término general
- Índice
- Monotonía
- Regularidades
- Aritmético

- Geométrico
- Diferencia
- Razón
- Convergencia
- Divergencia

Notaciones:

- Sucesión: (a_n)
- Término n-ésimo: a_n
- Término general: $a_n= f(n)$
- Índice: n $\forall n \in N$ $n \geq 1$
- Razón: r
- Diferencia: d
- Suma de los n primeros términos de una sucesión*:* S_n
- Suma de sucesiones: (s_n)
- Producto de sucesiones*:* (p_n)

Convenios:

- Las sucesiones se representan entre paréntesis, con letras minúsculas y subíndice n.
- En caso de conocer el término general de la sucesión, ésta se puede expresar de la forma $(a_n)=(f(n))$.

CONCEPTOS:

- Sucesión de números reales.
- Sucesiones creciente y decreciente.
- Término de la sucesión.
- Término general.
- Sucesión acotada.
- Sucesiones convergentes.
- Sucesiones divergentes.
- Sucesiones recurrentes.
- Suma y producto de sucesiones.
- Progresiones aritmética y geométrica.
- Diferencia.
- Razón.
- Interpolaciones y extrapolación aritmética y geométrica.
- Suma de los n primeros términos de una progresión.
- Producto de los n primeros términos consecutivos de una progresión geométrica.

ESTRUCTURAS:

- $\{(a_n), +, .\}$ Anillo unitario y conmutativo.
- $\{R, +, *\}$ Cuerpo Conmutativo.
- $\{(a_n), +, *\}$ Espacio vectorial sobre R.

CAMPO PROCEDIMENTAL:

En este campo de conocimiento incluiremos los procesos y modos de actuación o ejecución de las tareas matemáticas.

Vamos a distinguir tres niveles diferentes de concreción: razonamientos, destrezas y estrategias.

RAZONAMIENTOS:

- Inductivo: Detección de regularidades numéricas en forma de sucesión.
- Figurativo: Identificar patrones de sucesiones en estructuras gráficas.
- Deductivo: Identificación de las propiedades que permiten clasificar las sucesiones.
- Reconocer la presencia de las progresiones aritmética y geométrica en situaciones reales.

DESTREZAS:

- Escritura y lectura de una sucesión.
- Identificar las sucesiones numéricas.
- Obtener el término general de una sucesión.
- Diferenciar entre progresión aritmética y geométrica.
- Operar con sucesiones.
- Construir una progresión conociendo solamente dos de sus términos.
- Sumar los n términos consecutivos de una progresión aritmética y geométrica. Interpolar los términos que se indiquen.

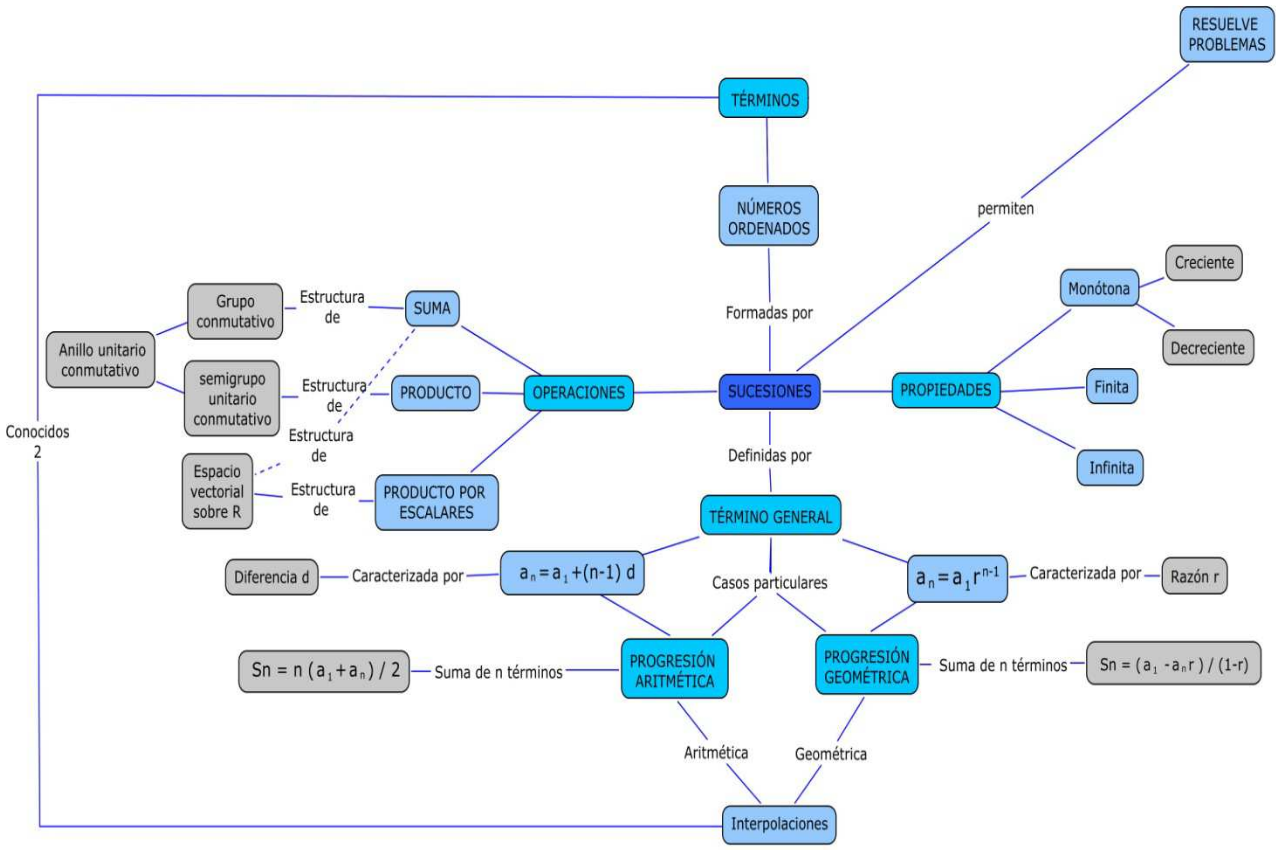
ESTRATEGIAS:

- Construcción de un conjunto ordenado de números siguiendo un patrón.
- Identificación de regularidades entre los términos de una sucesión.
- Obtención del término general de una sucesión.

- Reconocimiento de patrones comunes en un conjunto ordenado de números.
- Identificación de las progresiones aritméticas y geométricas.
- Cálculo de la diferencia en una progresión aritmética.
- Obtención del término general y de la suma de los n primeros términos de las progresiones aritméticas.
- Cálculo de la razón de una progresión geométrica.
- Obtención del término general, de la suma y del producto de los n primeros términos de una progresión geométrica.
- Emplear las relaciones entre los términos de una progresión aritmética o geométrica para obtener nuevas relaciones o para resolver problemas prácticos.
- Representación gráfica de una sucesión.
- Técnicas de resolución de problemas donde estén involucradas las sucesiones, progresiones aritméticas y geométricas.
- Representación matemática de una situación utilizando sucesivamente diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre ellos.

MAPA CONCEPTUAL:

A continuación presento un mapa conceptual que relaciona la mayor parte de estas nociones.



3.1.3 SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

En la siguiente sección procedo a describir los distintos sistemas que utilizaré en el tema para representar los conceptos de sucesiones, progresiones aritméticas y geométricas.
Abordaré cinco tipos de representaciones: verbal, simbólica, tecnológica con materiales y métodos manipulativos, gráfica y numérica.

REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA:

Este sistema de representación se basa en la identificación de un conjunto de números dados mediante símbolos.

- **(a_n)** *Sucesión. Para* $n \in N \quad n \geq 1$
- **a_n** *Término, y se suelen designar mediante una letra con subíndice. El subíndice de cada elemento indica el lugar que ocupa en la sucesión* $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_{20}, \ldots\ldots\ldots$
- **$a_n = f(n)$** *Término general de un sucesión a la expresión que representa un término cualquiera de esta.*
- **$a_n > a_{n+1}$ ó (a_n) ↓** *Sucesión decreciente*
- **$a_n < a_{n+1}$ ó (a_n) ↑** *Sucesión creciente*

- **($a_n + b_n$)** Suma de sucesiones
- **S_n** Suma de los primeros n-términos
- ***Numérica***:(1,3,5,7,….) Sucesión

REPRESENTACIÓN VERBAL:

La representación verbal del concepto de sucesión, progresión aritmética y geométrica se manifiesta en la comunicación oral de resultados, como por ejemplo:

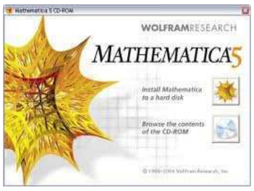
- Pares e impares (sucesiones de números pares, impares)
- Oscilante (sucesiones en los que sus términos alternan de mayor a menor o viceversa)
- Sucesiones alternadas (son aquellas que alternan los signos de sus términos)
- Geométrica (sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente multiplicado por un número fijo, r, llamado razón)
- Aritmética (sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente sumando un mismo número, positivo o negativo, al que se llama diferencia, d, de la progresión)
- Múltiplos de k (sucesión que sus términos son múltiplos de un número cualquiera)
- Sucesión de Fibonacci (sucesión recurrente que los términos se obtienen sumando los dos anteriores)
- Sucesiones infinitas (sucesiones que no tienen límite finito)
- Sucesión de Farey (para n=3), F(3): una serie de fracciones en la que se tiene como numerador y denominador los números entre 1 y 3 $^1/_1, ^1/_2, ^1/_3, ^2/_1, ^2/_2, ^2/_3, ^3/_1, ^3/_2, ^3/_3$
- Sucesión constante (si todos sus términos son iguales) $a_n = k$ ó $a_n = a_{n+1}$

REPRESENTACIÓN MEDIANTE MATERIALES Y MÉTODOS MANIPULATIVOS:

Las herramientas manipulativas o TIC's nos ayudan a representar, resolver y comprender las sucesiones y progresiones aritméticas y geométricas.

- Calculadoras gráficas:

- Programas informáticos como:

Mathematica 

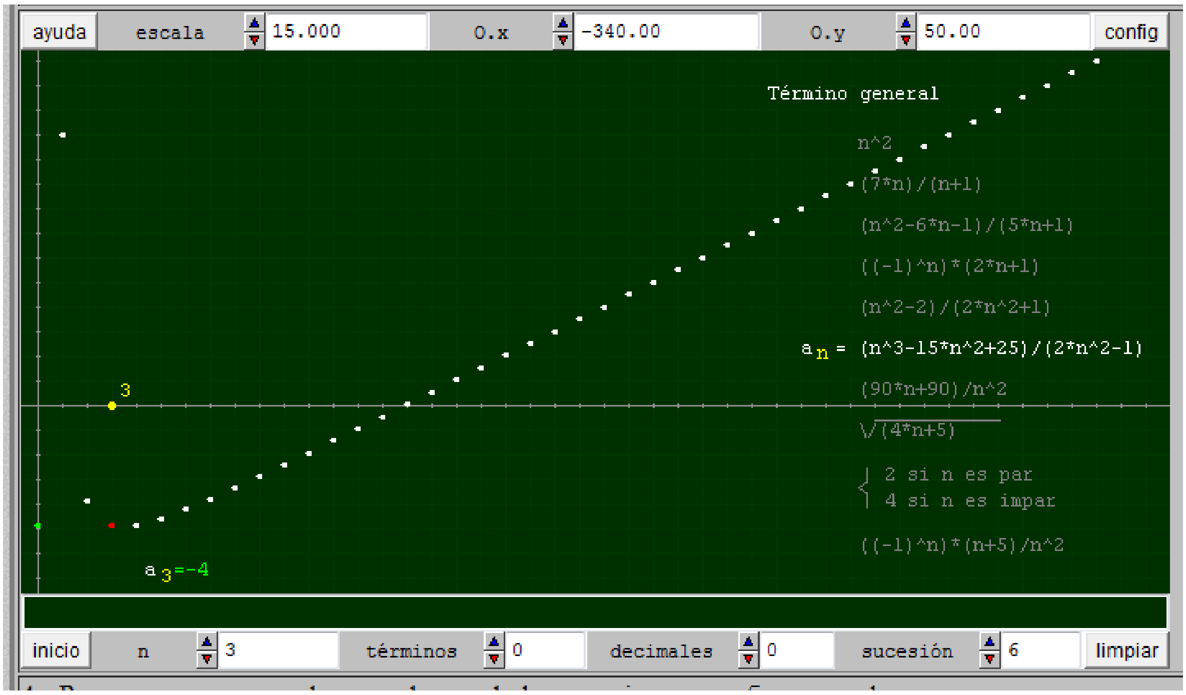
Geogebra

Octave

Recursos online

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/Descartes1/Bach_HCS_2/Sucesiones_numeros_reales_limites/Sucesiones_representacion.htm

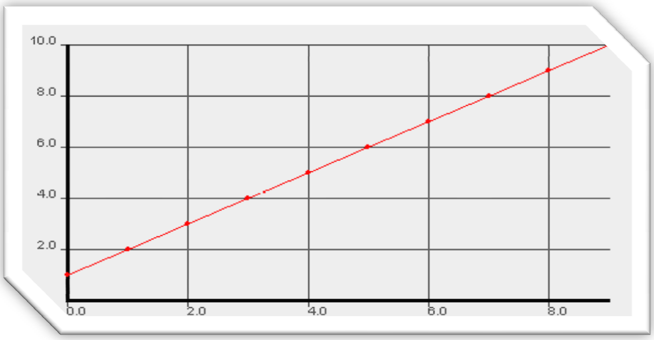
Página web “Descartes”



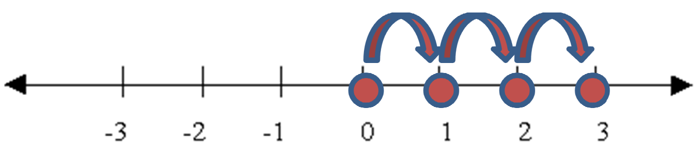
REPRESENTACIÓN GRÁFICA:

Con este sistema de representación se pretende que el alumno relacione las sucesiones y progresiones con su representación gráfica.

- Plano



- Recta



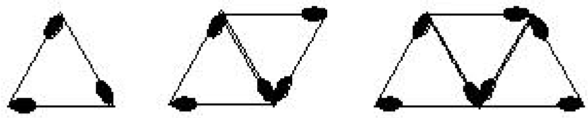


fig.1 fig.2 fig.3

- Regularidades

REPRESENTACIÓN NUMÉRICA –TABULADA:

La representación numérica de los conceptos de sucesiones, progresiones aritméticas y geométricas se manifiesta en el cálculo de tablas de valores y el estudio de conjuntos de números que cumplen ciertas regularidades.

Ejemplos:

1.- {1, 3, 5, 7,9 …………….} Término general: a_n= 2n-1

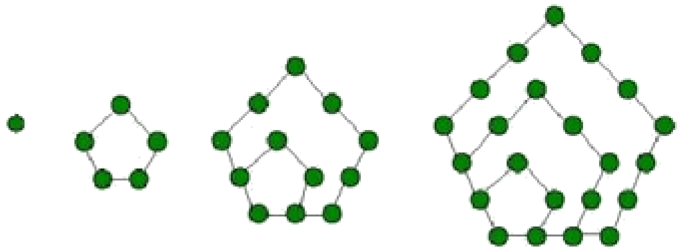
2.- {4,-3,-10,-17,……….} Término general: b_n= -7n+11

Tabla:

n	a_n=f(n) =2n+1
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9

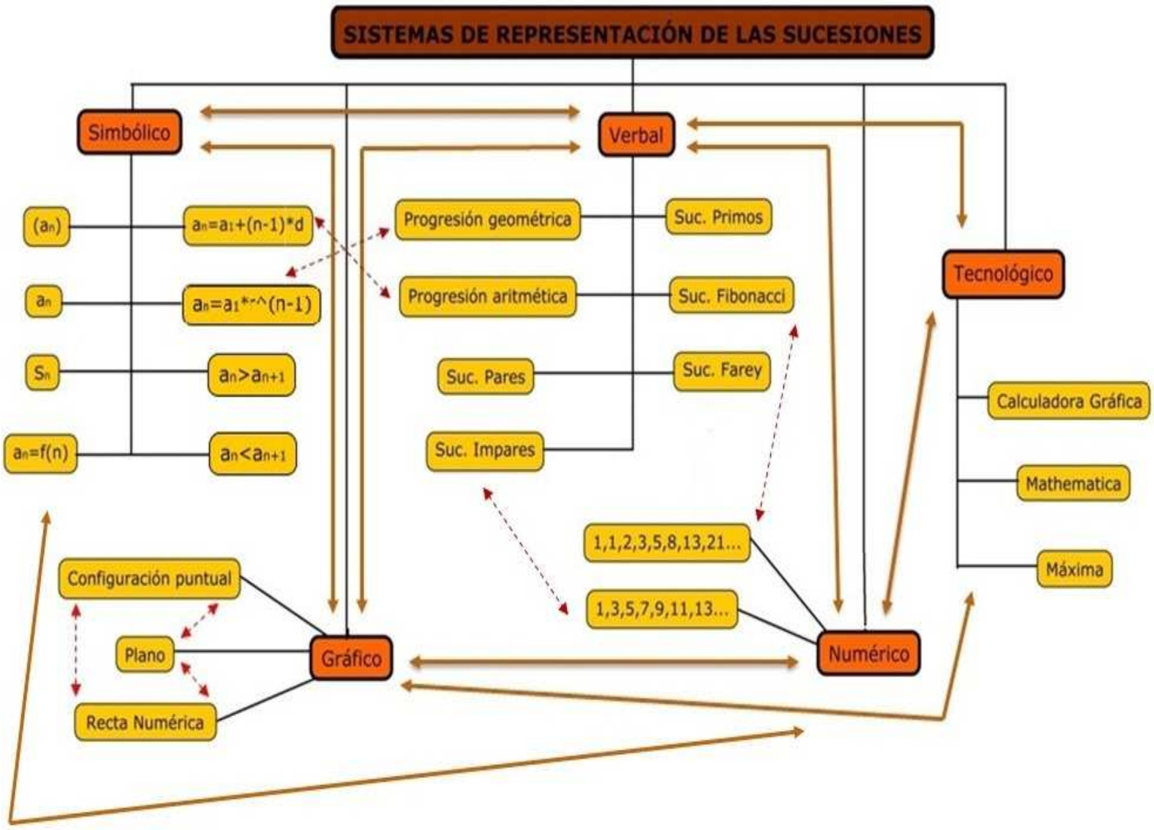
RELACIONES ENTRE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN:

- Verbal: Sucesión de números pentagonales
- Simbólico: (a_n) = $\left(\frac{n(3n-1)}{2}\right)$
- Numérico: (1,5,12,22,…)
- Gráfico:



1 5 12 22

A continuación exponemos un mapa conceptual de los sistemas de representación:



3.1.4 FENOMENOLOGÍA

El último de los organizadores dentro del análisis de contenido es el análisis fenomenológico, que tendrá en cuenta el planteamiento funcional de las matemáticas. Mostraremos la conexión entre el significado de conceptos y procedimientos con el mundo real, en situaciones cotidianas, con las situaciones en las que se localizan, con los contextos en los que tiene sentido ponerlos en juego y con los fenómenos que surgen o en cuyo tratamiento se implican tales conceptos. En definitiva consiste en crear las condiciones para identificar aquellas familias de fenómenos, relacionados con las sucesiones, que permitan a alumnos construir objetos mentales necesarios y suficientes para comprender tanto los conceptos involucrados como la operatoria y su aplicación práctica.

ANÁLISIS DE CONTEXTOS:

Un contexto matemático es un marco en el cual conceptos y estructuras atienden unas funciones, responden a unas necesidades como instrumentos de conocimiento. Damos respuesta a la pregunta ¿para qué se utilizan los conceptos que conforman este tema?.

Destacamos tres contextos fundamentales:

1.- Variaciones dependientes de la adición de los dos términos anteriores.

2.- Variaciones constantes y regulares.

3.- Variaciones que se modifican siguiendo un patrón constante.

Algunas de las subestructuras matemáticas que subyacen son:

- Sucesión de Fibonacci {1,1,2,3,5,8…….}
- Progresiones Aritméticas
- Progresiones Geométricas

ANÁLISIS DE FENÓMENOS:

Las sucesiones constituyen conjuntos numéricos infinitos numerables, obtenidos mediante alguna regularidad o ley; representan la abstracción de conjuntos finitos, junto con una regla que permite continuar obteniendo términos indefinidamente en función de la posición que ocupa.
El estudio de las sucesiones está orientado a los aspectos numéricos, algebraicos y analíticos, pero es cierto que hay fenómenos en la vida real en los que una serie de números están relacionados entre sí mediante una regla que puede combinarse con sentido.

Algunos de los fenómenos donde adquieren significado los conceptos de este tema pueden ser:

1.- Cualquier fenómeno de flujo o incremento temporal fijo. Éstos son fenómenos en los que las medidas obtenidas sobre la colección de objetos tienen un crecimiento o aumento constante.
2.- Fenómenos de crecimiento o división, por ejemplo, el problema de los granos de trigo y el tablero de ajedrez. En estos fenómenos las medidas aumentan mediante producto por un factor constante: cada objeto o unidad inicial da lugar a su vez a ***n*** objetos o ***n*** unidades en el objeto siguiente.
3.- Fenómenos en los que el crecimiento es aditivo pero en cada paso el incremento aumenta en una unidad (la numeración de las calles de una ciudad)
4.- Descendencia o reproducción de una pareja de conejos, crecimiento vegetativo. Se describen con la sucesión de Fibonacci que son fenómenos que se ajustan a leyes recurrentes.

ANÁLISIS DE SITUACIONES:

Pasamos a estudiar las situaciones en las que se localizan los problemas o cuestiones matemáticas.

Una situación vendrá dada por una referencia al mundo (natural, cultural y social) en la cual se sitúan las tareas y cuestiones matemáticas que se proponen a los estudiantes. Su principal finalidad es que nos permitirán localizar un problema y delimitar el campo de fenómenos de los que surge.

Según el estudio Pisa, las situaciones a la hora de clasificar las tareas matemáticas pueden ser de tipo personal, educativo o laboral, público y científico (OCDE, 2005a; pp.41-42).

a) *Situación personal:*
Son aquellas que están relacionadas con la vida diaria del alumno. Un ejemplo puede ser:

Al comienzo del año, un alumno decide ahorrar para comprarse una consola de video juegos. En enero mete en su hucha 10 euros y cada mes introduce la misma cantidad que el mes anterior y 1 euro más.
¿Cuánto dinero habrá ahorrado al finalizar el año?

b) *Situación educativo o laboral:*
Son las que el alumno se encuentra dentro del centro escolar o entorno de trabajo. Un ejemplo:

En la clase de educación física se realiza una carrera de 110 metros valla, en la que se van a situar 10 vallas. La primera se sitúa a 15 metros de la salida y la última a 96 metros.
¿A qué distancia de la salida deberán ser colocadas las vallas?

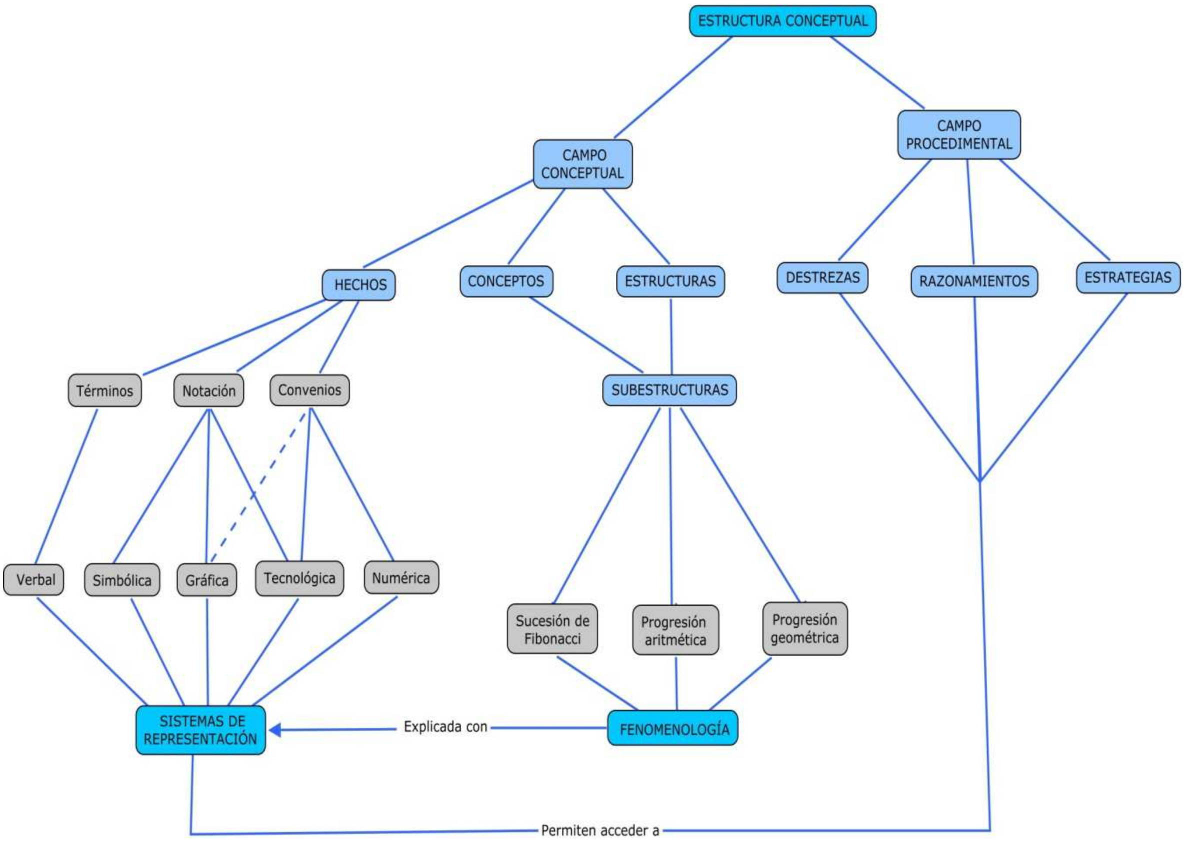
c) *Situación pública:*
Son aquellas que hacen referencia a una comunidad, con la finalidad de que los alumnos activen su comprensión, conocimiento y habilidades matemáticas para evaluar los aspectos de una situación externa con repercusiones importantes en la vida pública. Un ejemplo puede ser:

La población de una ciudad aumenta un 5% cada 10 años. Si en el 2006 la población era de 5000 personas, ¿Cuál será la población en el año 2036?

d) *Situación científica:*
Son más abstractas y pueden implicar la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático.

En el año 1986 fue visto el cometa Halley desde la Tierra, a la que se acerca cada 76 años. Esta era la cuarta vez que nos visitaba desde que el astrónomo Halley lo descubrió.
¿En qué año fue descubierto?. ¿Cuándo será visto en el siglo XXI?

Para finalizar la sección del análisis de contenido, mostraremos un mapa conceptual, en el que podemos ver las relaciones que existen entre la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología.



3.2 ANÁLISIS COGNITIVO

Una vez que se ha realizado el análisis de contenido es necesario organizar toda la complejidad de nociones y relaciones que conforman un tema.

El análisis cognitivo capacita a los profesores para que describan, analicen y organicen las expectativas de aprendizaje que tienen los escolares de un nivel educativo concreto sobre el tema tratado. El logro de estas expectativas se hará visible mediante la actuación de los escolares ante las tareas que el profesor les demanda, Coll (2002).

Estructuraremos este análisis, siguiendo la organización de J. L. Lupiánez, en torno a que se espera que los alumnos aprendan, a lo que puede interferir el profesor en el aprendizaje, y a lo que les permite a los discentes aprender y al profesor comprobar si el aprendizaje se produce adecuadamente. De este modo podemos definir tres organizadores que estructuran y organizan el análisis cognitivo.

3.2.1 EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE

Este organizador es el destinado a delimitar y ordenar lo que el profesor espera que los escolares aprendan sobre un tema matemático concreto.

Pretendemos dar respuestas a preguntas como: ¿qué espero que aprendan los escolares? ¿Cómo puedo facilitarles el aprendizaje?, ¿Qué errores cometerán?, ¿Con qué dificultades se encontrarán?, ¿Qué puede ralentizar el proceso de aprendizaje?

Es necesario que en primer lugar establezcamos unos focos de interés para el aprendizaje, que consistirán en agrupaciones especificas de conceptos, estrategias y estructuras, y cuya principal finalidad será la de establecer prioridades sobre las expectativas.

F1. Clasificar las sucesiones según sus características.
F2. Operar con sucesiones.
F3. Matematización del problema.

Establecidos los focos prioritarios de interés, distinguimos entre dos niveles principales de expectativas importantes para el profesor: objetivos específicos y competencias matemáticas.

F1. Clasificar las sucesiones según sus características

1) Identificar regularidades en una secuencia de números.
2) Obtener el término general de una sucesión conocidos varios términos de la misma.
3) Identificar progresiones aritméticas y geométricas.
4) Reconocer sucesiones recurrentes, crecientes y decrecientes.
5) Representar sucesiones gráficamente.

F2. Operar con sucesiones.

6) Hallar la suma y multiplicación de sucesiones.
7) Hallar la multiplicación de un escalar con una sucesión.
8) Obtener la suma de los n primeros términos consecutivos de una progresión.
9) Obtener la suma de los n primeros términos consecutivos de una sucesión.

F3. Matematización del problema.

10) Identificar sucesiones en nuestro entorno.
11) Expresar algún problema de la vida cotidiana en forma de sucesión.

Establecidos los objetivos específicos, en el siguiente nivel los relacionamos con las competencias matemáticas PISA que vamos a desarrollar en cada caso. Estas competencias son las siguientes:

PR: Pensar y Razonar**; AJ:** Argumentar y Justificar**; C:** Comunicar**; M:** Modelizar**;**
RP: Plantear y Resolver Problemas**; R:** Representar**; LS:** Uso de Lenguaje y Operaciones Simbólicas, Formales y Técnicas**; HT:** Emplear Soportes y Herramientas Tecnológicas**.**

En las siguientes tablas apreciamos a que competencias PISA contribuye cada uno de los objetivos.

	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
(1)	★			★				
(2)	★						★	
(3)		★					★	
(4)		★				★		
(5)						★		★
(6)		★			★		★	
(7)		★			★		★	
(8)	★	★			★		★	
(9)	★	★			★		★	
(10)		★	★	★		★	★	★
(11)	★		★	★		★	★	

La siguiente tabla muestra el balance total de contribución al desarrollo de las competencias PISA:

COMPETENCIAS	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Nº de apariciones	**5**	**7**	**2**	**3**	**4**	**4**	**8**	**2**

Vemos que la competencia mas desarrollada es el "Uso del Lenguaje y Operaciones Simbólicas, Formal y Técnicas" (LS), pero este resultado era de esperar puesto que nos encontramos en un tema algebraico, además se considera un aspecto esencial para poder operar y trabajar matemáticamente con las sucesiones. La adquisición de esta competencia permitirá al escolar decodificar el lenguaje simbólico y formal y su relación con el lenguaje natural, manejar enunciados y expresiones con símbolos y fórmulas. Le sigue "Argumentar y Justificar" y el resto en menor medida, pero esto se debe a que cada foco puede estar más relacionado con unas competencias que con otras y no quiere decir que en el desarrollo de las sesiones de clase no se dedique el suficiente tiempo para desarrollar todas las competencias de la manera más uniforme posible.

3.2.2 LIMITACIONES DE APRENDIZAJE

Nos vamos a centrar en los posibles errores y dificultades que pueden surgir en el proceso de aprendizaje. Esto nos servirá para obtener información acerca de en qué aspectos del tema que estamos trabajando pueden surgir situaciones que frenen o ralenticen el aprendizaje del alumnado.

En la siguiente tabla hemos recogido los principales errores y dificultades que pensamos que pueden aparecer, así como los objetivos a los que están asociados.

	ERRORES Y DIFICULTADES	OBJETIVOS ASOCIADOS
E1	*Confunden los conceptos de término e índices*	1
E2	*Obtienen la ley general analizando los primeros términos sin analizar los términos superiores*	1, 2
E3	*Confunden progresión aritmética y geométrica*	3
E4	*No son capaces de identificar las sucesiones como un conjunto de elementos que tienen características comunes*	6, 7
E5	*Confunden la suma de los términos de una sucesión con la búsqueda del término general*	2, 8
D1	*No son capaces de detectar regularidades*	1, 4
D2	*En una representación grafica saben obtener el siguiente término de la representación pero no el término general de la sucesión.*	2, 5
D3	*No saben contextualizar el problema*	9, 10
D4	*No saben a partir del término general encontrar la sucesión*	1
D5	*No siguen el razonamiento para la obtención de la suma de los n primeros términos de una progresión, sólo memorizan.*	8
D6	*No saben razonar que la suma de los términos de una progresión se puede expresar en función de la diferencia o razón*	3, 6

3.2.4 OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE

Presento a continuación ejemplos de tareas para conseguir subsanar algunas de las dificultades:
TAREA 1:

"La sucesión del frutero". Un frutero ha construido una pirámide con naranjas, todas iguales, cuya base tiene 10 naranjas de lado. En cada capa coloca las naranjas aprovechando los huecos que dejan las naranjas de la capa anterior.
a) Escribir la sucesión de naranjas que hay en cada capa.
b) *¿Cuántas naranjas tiene la pirámide?*
c) *Generaliza al caso de lado* n naranjas.
d) *Explica tu razonamiento.*

La tarea contribuye a los siguientes objetivos:

- Identificar regularidades en una secuencia de números.
- Obtener el término general de una sucesión conocidos varios términos de la misma.
- Expresar un problema de la vida cotidiana en forma de sucesión.
- Obtener la suma de n términos consecutivos de una progresión.

Además, esta tarea nos permite reconocer los errores y dificultades siguientes:

- Obtienen la ley general analizando los primeros términos sin analizar los términos superiores (Error).
- No son capaces de detectar regularidades (DF).
- En una representación gráfica saben obtener el siguiente término de la representación pero no el término general de la sucesión (DF).
- No saben contextualizar el problema (DF).

TAREA 2:

Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas ó geométricas. En caso afirmativo halla su término general. Representa los 5 primeros términos en la recta.
1) 8,5,2,-1,-4
2) ¼ ,1,4,16,64
3) 2, 4/3 , 8/9, 16/27,32/81
4) 4,8,16,32,64

Esta tarea contribuye a los siguientes objetivos:

- *Identificar regularidades en una secuencia de números.*
- *Obtener el término general de una sucesión conocidos varios términos de la misma.*
- *Identificar progresiones aritméticas y geométricas.*

La tarea nos permite reconocer errores y dificultades siguientes:

- *Obtienen la ley general analizando los primeros términos sin analizar los términos superiores (Error).*
- *No son capaces de detectar regularidades (DF).*
- *Confunden progresión aritmética y geométrica (DF).*

Las competencias PISA de estas tareas son:

	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Tarea 1	❖		❖	❖	❖		❖	

3.3 ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

El análisis de instrucción, como parte del análisis didáctico, se sitúa en torno a diferentes componentes que son importantes en el proceso de planificación y que giran en torno a las tareas matemáticas escolares. Se centra en el diseño, selección y secuenciación de las tareas. Entre las que propone Lupiáñez, L. Rico (2009), en este apartado nos centraremos en dos: la complejidad de las tareas y los materiales y recursos que pueden emplearse en ellas.

3.3.1 COMPLEJIDAD DE LAS TAREAS

En el marco de PISA, las tareas se distinguen de acuerdo a las demandas cognitivas que le exigen a los alumnos que tienen que resolverlas, dando lugar a tres tipos de tareas de acuerdo a la complejidad de esas demandas: reproducción, conexión y reflexión (OCDE, 2005).

Presento para cada grado de complejidad un ejemplo de tarea:

Reproducción:

a) Completa las sucesiones con los términos que faltan y obtén la ley de recurrencia.
1) 15, 18, 21 24, _____, _____, ____
2) 200, 100, 50 , 25, ____, ____,_____
3) 1, -2, -5, -8, ____, ____, _____

b) Halla los términos séptimo, décimo y décimo tercero de las sucesiones cuyo término general es:
1) $a_n = n+7$
2) $b_n = (n+2)^2$
3) $c_n = \frac{2n+1}{2n-1}$

c) Indica cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas o geométricas
1) 2, -6, 18, -54
2) 3,5; 4,75; 6; 7,25
3) 7, 7, 7, 7, 7
4) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$

Las preguntas en este nivel requieren que el estudiante demuestre que domina el conocimiento aprendido. Son problemas que les resultan familiares y se resuelven aplicando algoritmos o destrezas técnicas. Incluye los procesos de acceder (recordar, reproducir) e identificar.

Conexión:

En un aparcamiento de coches se cobran 2 euros por la primera hora de utilización y por cada hora o fracción adicional 1,5 euros. Al retirar el vehículo se pagó 9,5 euros. Contesta a las siguientes preguntas:
1) ¿Qué tipo de progresión es?
2) Hallar la expresión del término general.
3) ¿Cuántas horas estuvo aparcado?

Para conexión, el criterio es que el alumnado tiene que decidir ante una variedad de técnicas para resolver el problema y además saber encontrar el camino hacia lo que se le pide enlazando ideas y conceptos del tema ya aprendidos. Incluye los procesos de aplicar, analizar y valorar.

Reflexión:

Si en un triángulo equilátero de 10 cm de lado se unen los puntos medios de los lados se obtiene un triángulo equilátero que denominamos de tipo N y otros tres triángulos equiláteros que denominamos de tipo P. Si repites el proceso con los triángulos de tipo P determina:
1) ¿Qué sucesión se obtiene con el número de triángulos de tipo P?
2) ¿Cuál es el término general de la sucesión?
3) ¿Cuántos triángulos de tipo P hay después de realizar el proceso 6 veces?

En este nivel son situaciones poco estructuradas que requieren que el estudiante comprenda, reflexione y use su creatividad para reconocer las matemáticas involucradas en el problema. Se exige que el estudiante analice, interprete y desarrolle sus propios modelos y presente argumentos matemáticos. Incluye procesos de sintetizar, crear y juzgar.

3.3.2 MATERIALES Y RECURSOS

Los materiales y recursos didácticos que podríamos utilizar en sucesiones son:

Pizarra computarizada o digital

La pizarra computarizada cuenta con una moderna computadora y un proyector con tecnología magnética que permite, con un objeto, escribir sobre la misma sin tener que usar el teclado. La funcionalidad de las PIZARRAS DIGITALES consiste en proyectar sobre una pantalla situada en un lugar relevante del aula cualquier tipo de información procedente del ordenador, de Internet o de cualquier otro dispositivo analógico o digital conectado al sistema: antena de televisión, video proyector, cámara de vídeo, etc.

Proyecto Descartes

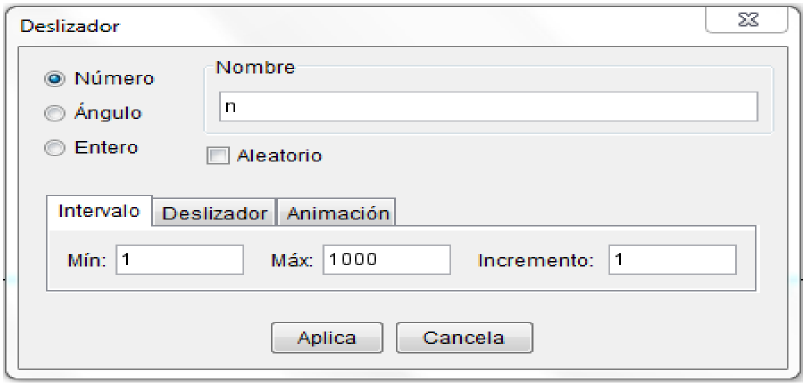
Este proyecto tiene como principal finalidad promover nuevas formas de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas integrando las TIC en el aula como herramienta didáctica. Los materiales de esta aplicación están desarrollados con la herramienta de autor «Descartes» que, con un interfaz sencillo e intuitivo de creación y manipulación de objetos matemáticos, permite al profesorado crear lecciones interactivas en formato Web para así diseñar itinerarios de aprendizaje adaptados a su alumnado. Contiene una amplia gama de archivos temáticos, guías de experimentación en el aula, manuales, foro de consultas y miscelánea de materiales. Además el proyecto «Descartes» se integra en la red «Experimentación DidácTICa en el Aula», EDA, promovida por el ITE en convenio con algunas comunidades autónomas que propone al profesorado la puesta en práctica de un plan de experimentación docente utilizando materiales digitales y promocionando hermanamientos escolares desde las Aulas.

Programa Geogebra

GeoGebra es una aplicación de código abierto diseñada especialmente para el aprendizaje y la enseñanza de las materias de Geometría y Álgebra. En su interfaz podremos visualizar un plano geométrico y otro algebraico, interrelacionados de manera que si añadimos elementos en uno u otro se creen de igual forma en el otro. El programa nos permite manejarnos con comodidad a través de un entorno atractivo en el que tan sólo deberemos seleccionar qué tipo de figura queremos estudiar e ir colocando los puntos, líneas o ángulos allí donde los necesitemos.

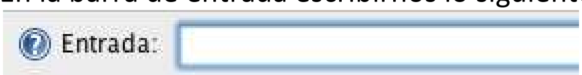
Geogebra permite de forma rápida y sencilla la visualización de sucesiones. Para ello podemos seguir los siguientes pasos:

Creamos un deslizador con las siguientes características:



- Tipo: Número
- Nombre: n
- Valores: Min: 1, Max: 100, Incremento: 1

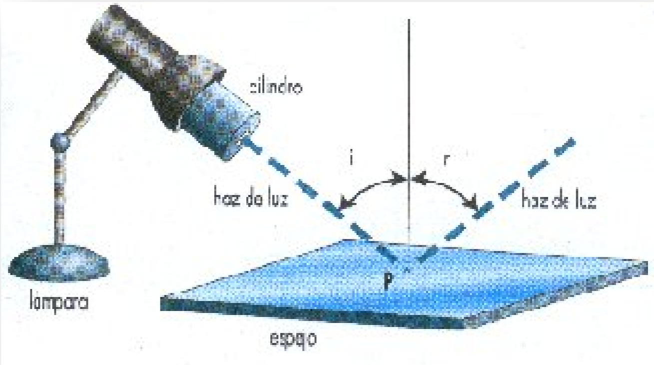
En la barra de entrada escribirnos lo siguiente:



Secuencia[(a_p,0), p, 1, n]
a_p= es el término general de la sucesión que queremos representar. Por ejemplo:
a_p= (p^2 + 3)/(2 p^2).
La orden quedaría así: Secuencia [((p^2 + 3)/(2 p^2)   ,0), p, 1, n]
Recuerda que para el ordenador los paréntesis son muy importantes.

Materiales manipulativos:

1) Dos láminas de vidrio en contacto y rayos luminosos. Los rayos que no experimentan reflexión alguna atraviesan ambas láminas de sólo una forma; para los rayos que sufren una reflexión hay dos rutas posibles; cuando sufren dos reflexiones, las trayectorias son de tres tipos, y cuando sufren tres, de cinco. Al ir creciendo el número *n* de reflexiones, el número de trayectorias posibles va ajustándose a la sucesión de Fibonacci: para *n* reflexiones, el número de trayectorias es *Fn*+2.



2) Piña, Piña de pino, Pétalos de flores, ramas y hojas de una planta, semillas de un girasol.
Todo lo anterior sigue la secuencia de números de Fibonacci.

Otros recursos:

También se usarán recursos convencionales como pizarra, libro de texto, calculadora gráfica o convencional, apuntes propios y relaciones de ejercicios.

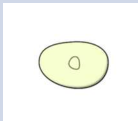
3.3.3 EJEMPLIFICACIÓN DEL ANÁLISIS DE UNA TAREA

Realizaremos este análisis siguiendo el esquema de la asignatura "Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas", en el que incluiremos las siguientes variables: nombre, instrucciones, recursos, agrupamiento, interacción, situación, sistemas de representación, meta, contribución a expectativas, limitaciones, complejidad, finalidad y fase.

Tarea: Reproducción de bacterias

En el laboratorio de Ciencias Naturales se realiza un experimento para observar el crecimiento de las bacterias XY34, que se reproducen por bipartición (es decir, cada bacteria al cabo de 30 segundos se divide en dos nuevas bacterias). Partiendo a las doce del mediodía de un cultivo de 100 bacterias, intenta escribir la cantidad de bacterias que debe haber al cabo de medio minuto, un minuto y cinco minutos.

Elementos de la tarea	**Meta**	Identificar sucesiones en el entorno, búsqueda de regularidades (coincide con el objetivo 10).
	Recursos / operaciones	Papel y lápiz
	Contenido	Cambio y relaciones (Identificar regularidades)
	Situación de aprendizaje	Científica. Contexto de orden 1
	Complejidad	Conexión
	Limitaciones del aprendizaje	No son capaces de detectar regularidades . No saben contextualizar el problema .
Condiciones	**Presentación**	Instrucciones verbales, lenguaje simple.
	Comunicación	Al comienzo del tema, el profesor expone la tarea de manera oral. En el caso de que hubiese dificultades de interpretación, se realiza en pizarra una representación gráfica de la bipartición de bacterias; se dejan unos minutos a los alumnos para su reflexión y resolución. Se pedirá a los alumnos sus conclusiones, y con la ayuda de uno de ellos, se resolverá.
	Agrupamiento alumnos	Grupal, los alumnos tendrán unos minutos para exponer y defender sus ideas.

Análisis de contenido	Campo conceptual	Reconocer la presencia de las progresiones aritmética y geométricas en situaciones reales(razonamientos, campo procedimental).
	Fenomenología	Algunos tipos de bacterias se reproducen por bipartición. Es decir, una bacteria se divide en dos, que a su vez se dividen también en dos y así sucesivamente. 
Criterios de evaluación	Foco 3.	2. Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado y observar regularidades en secuencias numéricas obtenidas de situaciones reales mediante la obtención de la ley de formación y la fórmula correspondiente, en casos sencillos. Extraer la información relevante de un fenómeno para transformarla en una expresión algebraica
	Foco 1	9. Identificar elementos matemáticos presentes en la realidad. Reconocer e interpretar elementos matemáticos de la realidad cotidiana.
COM	Competencias PISA	PR,M, LS
	Competencias básicas	Conocimiento e interacción con el mundo físico

4. PROPUESTA DE UNIDAD DIDÁCTICA

4.1 OBJETIVOS DE LA ETAPA, OBJETIVOS ESPECÍFICOS, COMPETENCIAS BÁSICAS E INDICADORES DE SEGUIMIENTO

Objetivos de la etapa

Según la orden ECI/2220/2007, la enseñanza de las Matemáticas en esta etapa tendrá como finalidad el desarrollo de las siguientes capacidades:

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica.

Competencias e indicadores de seguimiento

<u>Matemática</u>
- Entiende el concepto de sucesión.
- Domina los conceptos de progresiones para poder resolver problemas numéricos.

<u>Comunicación lingüística</u>
- Entiende un texto científico con la ayuda de los conocimientos que, sobre sucesiones y progresiones, se han estudiado.

<u>Conocimiento e interacción con el mundo físico</u>
- Utiliza lo aprendido sobre progresiones para describir fenómenos de la vida real.

<u>Tratamiento de la información y competencia digital</u>
- Utiliza la calculadora para ahorrar tiempo en el cálculo recurrente de progresiones.
- Sabe utilizar internet para encontrar información.

<u>Cultural y artística</u>
- Contempla los números y los sistemas de numeración como una conquista cultural de la humanidad.
- Descubre el componente lúdico de las matemáticas.

<u>Aprender a aprender</u>
- Valora el aprendizaje de razonamientos matemáticos como fuente de conocimientos futuros.

<u>Desarrollo de la autonomía e iniciativa personal y competencia emocional</u>
- Aprende procedimientos matemáticos que se pueden adaptar a distintos problemas.

Objetivos específicos

Para nuestra unidad, centramos las prioridades de aprendizaje en los objetivos que expondremos a continuación:

1) Identificar regularidades en una secuencia de números.

2) Obtener el término general de una sucesión conocidos varios términos de la misma.

3) Identificar progresiones aritméticas y geométricas.

4) Reconocer sucesiones crecientes y decrecientes.

5) Representar sucesiones gráficamente.

6) Hallar la suma y multiplicación de sucesiones

7) Hallar la multiplicación de un escalar con una sucesión

8) Obtener la suma de los n primeros términos consecutivos de una progresión.

9) Obtener la suma de los n primeros términos consecutivos de una sucesión.

10) Identificar sucesiones en nuestro entorno.

11) Expresar algún problema de la vida cotidiana en forma de sucesión.

4.2 CONTENIDOS: CONCEPTUALES, PROCEDIMENTALES Y ACTITUDINALES

CONCEPTUALES	PROCEDIMENTALES	ACTITUDINALES
Sucesiones. • Sucesiones de números reales. • Término de la sucesión. • Término general. • Notación de sucesión. • Suma y producto de sucesiones. **Tipo de sucesiones.** • Sucesiones creciente y decreciente**.** • Sucesión acotada. • Sucesiones convergentes y divergentes. • Sucesiones recurrentes. **Progresiones geométricas.** • Diferencia de dos términos consecutivos. • Término general. • Suma de los n primeros términos. **Progresiones geométricas.** • Razón. • Término general. • Suma de los n primeros términos. • Producto de los n primeros términos.	• Construcción de un conjunto ordenado de números siguiendo un patrón. • Identificación de regularidades entre los términos de una sucesión. • Obtención del término general de una sucesión. • Reconocimiento de patrones comunes en un conjunto ordenado de números. • Identificación de las progresiones aritméticas y geométricas. • Cálculo de la diferencia en una progresión aritmética. • Obtención del término general y de la suma de los n primeros términos de las progresiones aritméticas. • Cálculo de la razón de una progresión geométrica. • Obtención del término general, de la suma y del producto de los n primeros términos de una progresión geométrica. • Emplear las relaciones entre los términos de una progresión aritmética o geométrica para obtener nuevas relaciones o para resolver problemas prácticos. • Representación gráfica de una sucesión. • Técnicas de resolución de problemas donde estén	• Mostrar curiosidad e interés por buscar regularidades en un conjunto numérico infinito. • Perseverar en la búsqueda de soluciones a problemas relacionados con las progresiones aritméticas y geométricas. • Desarrollar la confianza en las propias capacidades para afrontar problemas de progresiones aritméticas y geométricas. • Fomentar el gusto por la presentación clara y ordenada de la resolución de las actividades. • Mostrar interés y respeto por las soluciones distintas a las propias.

	involucradas las sucesiones, progresiones aritméticas y geométricas. • Representación matemática de una situación utilizando sucesivamente diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre ellos.	

4.3 METODOLOGÍA

Se entiende por metodología, los aspectos referentes al cómo y cuándo enseñar. Posibilitan la autonomía a los centros y profesores, en el marco de la legislación vigente. Constituyen un conjunto de decisiones como: principios metodológicos, coordinación didáctica, tipos de actividades, organización del espacio, tiempo, agrupamientos y materiales y recursos, participación de los padres, …etc.

En primer lugar vamos a considerar los *conocimientos previos* de los alumnos puestos que será esa la base de la que partamos para aplicar nuestra unidad didáctica. Además tendremos en cuenta el *ritmo de aprendizaje* de cada alumno.

Centraremos nuestra atención diaria en los escolares, intentando que sean ellos los principales protagonistas de las sesiones y que descubran ciertos conceptos por si mismos, lo que nos llevará una *perspectiva constructivista* del proceso de aprendizaje. Pretendemos que los escolares tengan una actitud crítica y que realicen tareas en el desarrollo de las clases, lo que nos permitirá que los alumnos/as de una forma progresiva, afiancen los conceptos, procedimientos y técnicas matemáticas, por lo que llevaremos a cabo una *metodología activa y participativa.*

Intentaremos que en cada sesión participen los alumnos realizando actividades en la pizarra e incluso explicando conceptos a partir de éstas. Pretendemos en principio que en estas intervenciones el profesor intervenga lo mínimo, intentando que los alumnos/as se corrijan entre ellos. Realizaremos también una serie de actividades que elaborarán en grupo y entregarán al profesor/a para su posterior corrección y evaluación.

Con respecto a las tareas se incluirán: tareas para *motivar y de relación con el entorno*, tareas para conocer los aprendizajes previos, tareas *exploratorias* fomentadoras de la interrogación y el cuestionamiento, tareas de *elaboración y construcción* de significados, tareas de *descontextualización y aplicación*, tareas de *ejercitación* y por últimos tareas de *síntesis*

Buscaremos medidas para estimular el interés y el hábito de la lectura para una mejora de la expresión ora y escrita, con un vocabulario especifico de términos y nociones matemáticas.

En lo que respecta a la *atención a la diversidad* y del acceso de todo el alumnado a la educación común proporcionaremos el material que sea necesario en cada caso, como pueden ser tareas de refuerzo o de ampliación, planes específicos para el alumnado que no promocione de curso. Asimismo, arbitraremos métodos que tengan en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado, favoreciendo la capacidad de aprender por sí mismos, así como el trabajo en equipo.

Finalmente, le daremos importancia a la utilización de las *tecnologías de la información y comunicación*, que permitirán que los alumnos se adapten con más facilidad al entorno social en que se desenvuelven, un entorno cada vez más tecnológico e informatizado.

Materiales y recursos:
Los materiales y recursos que vamos a utilizar en nuestra unidad didáctica son: herramientas tecnológicas como los programas informáticos Geogebra, Mathematica y materiales (por ejemplo, una piña de pino) para que los alumnos observen directamente como se pueden explicar fenómenos de la naturaleza por mediación de las matemáticas.

4.4 EVALUACIÓN: CRITERIOS, PROCEDIMIENTOS, ESTRATEGIAS DE EVALUACIÓN Y CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

Criterios de evaluación

1.- Averiguar las regularidades de una sucesión.
2.- Escribir un término concreto de una sucesión dada mediante su término general, o de forma recurrente.
3.- Obtener el término general de una sucesión dada por sus primeros términos.
4.- Utilizar adecuadamente la notación utilizada en las sucesiones.
5.- Representar gráficamente sucesiones y progresiones.
6.- Identificar progresiones aritméticas y obtener su diferencia.
7.- Obtener el término general de una progresión aritmética.
8.- Calcular la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.
9.- Reconocer progresiones geométricas y averiguar su razón.
10.- Obtener el término general de una progresión geométrica.
11.- Calcular la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica.
12.- Calcular el producto de los n primeros términos de una progresión geométrica.
13.- Resuelve problemas de sucesiones, progresiones aritméticas y geométricas.
14.- Resuelve problemas de sucesiones, progresiones aritméticas y geométricas utilizando “Mathematica”.

Procedimientos de evaluación: Entre los procedimientos de evaluación podemos distinguir las técnicas y los instrumentos.
Técnicas:
- Observación sistemática para registrar y clasificar los sucesos de clase.
- Revisión, corrección y análisis de las tareas.
- Pruebas orales y escritas.
- Cuadernos de clase.

Instrumentos:
- Escalas de observación: Participación individual y grupal, preguntas y sugerencias sobre el tema,…etc.
- Listas de control.
- Los registros anecdóticos de clase.
- Diarios de clase.

Estrategias de evaluación

- Observación directa.
- Evaluación inicial.
- Evaluación continua.
- Evaluación final.

Criterios de evaluación:

Los criterios de evaluación que vamos a seguir para la obtención de la nota final serán:

- Cuaderno de trabajo y realización de las tareas propuestas diariamente (10%).
- Comportamiento y participación en clase (10%).
- Prácticas de ordenador (10%).
- Trabajo grupal (10%)
- Prueba escrita (60%).

4.5 TEMPORALIZACIÓN, SECUENCIACIÓN Y ORGANIZACIÓN DE LAS TAREAS. GESTIÓN DE CLASE

Esta unidad didáctica se impartirá en el tercer trimestre, y se desarrollará en 7 sesiones, aproximadamente 2 semanas.

Describimos la organización de las tareas de la unidad didáctica:

Sesión 1: Introducción al concepto de sucesión. Regularidades numéricas.

Sesión 2: Término general de una sucesión. Sucesiones recurrentes. Operaciones con sucesiones. Representación gráfica de sucesiones.

Sesión 3: Progresiones aritméticas. Suma de los n primeros términos. Interpolación aritmética.

Sesión 4: Progresiones geométricas. Suma de los n primeros términos. Interpolación geométrica. Cálculo de fracciones generatrices mediante progresiones geométricas.

Sesión 5: Recursos informáticos. Prácticas de ordenador con "Mathematica". Representación gráfica. Sucesiones, progresiones aritméticas y geométricas.

Sesión 6: Trabajos en grupos. Dudas individuales. Resolución de problemas.

Sesión 7: Prueba escrita.

Describimos la distribución general temporal de cada sesión teniendo en cuenta que será flexible según las necesidades del alumnado en cada momento. En las sesiones donde tengamos planeado el uso de los ordenadores, se modificará la distribución.

• Realización de un resumen inicial (oral o en la pizarra) donde intervengan los alumnos para recordar lo que se explicó en la sesión anterior, excepto en la primera sesión (10 min).
• Realización en la pizarra de alguna tarea propuesta y aclaración de dudas del día anterior (15 min).

• Explicación de los conceptos matemáticos con la presentación de un problema que ejemplifique los contenidos a tratar en la sesión (15 min).
• Realización de tareas en clase (15 min).
• Propuesta de tareas para la siguiente sesión (5 min).
• En algunas sesiones, uso del ordenador para la representación gráfica y resolución de problemas.

4.6 ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

La educación es un derecho básico, de carácter obligatorio recogido en la Constitución y que, por tanto, todo ciudadano debe encontrar respuesta a sus necesidades formativas, de modo que adquiera un bagaje cultural que le permita convertirse en miembro de pleno derecho de esta sociedad.

Las tareas que propongo en las diferentes sesiones de la misma, atenderán a los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado, así como a sus intereses. Serán de dificultad *graduada*. Se dispondrá de una batería de *tareas de refuerzo* (la mayoría tareas de ejercitación) y de *ampliación* (la mayoría tareas de reflexión) para que, tanto los alumnos con dificultades de aprendizaje, como los que tienen capacidad para profundizar en los contenidos puedan superar la evaluación de la unidad didáctica y/o ampliar sus conocimientos sobre la misma.

4.7 DESARROLLO DETALLADO DE LAS SESIONES

SESIÓN 1: INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE SUCESIÓN. REGULARIDADES NUMÉRICAS.

Contenidos básicos: Regularidades. Secuencia numérica. Sucesión. Término, Índice. Término enésimo.
Situaciones: Social, educativa.
Sistemas de representación: Simbólico. Verbal.
Expectativas de aprendizaje:
Las capacidades a desarrollar en esta sesión son:

1) Identificar regularidades en una secuencia de números.
10) Identificar sucesiones en nuestro entorno.
11) Expresar algún problema de la vida cotidiana en forma de sucesión.

Las competencias PISA en las que vamos a trabajar son:

Pensar y razonar **(PR),** Argumentar y justificar **(AJ),** Modelizar **(M),** Lenguaje simbólico **(LS)**, Comunicar**(C)**.

Intenciones de la planificación de la sesión:

Pretendemos, en primer lugar introducir el tema con un ejemplo sencillo, tarea 1, que les ayude a relacionar el tema: Sucesiones, progresiones aritméticas y geométricas con la vida real y que les sirva de motivación. Después introduciremos los conceptos correspondientes a esta sesión. Acabaremos la sesión con dos tareas que recogen la mayor parte de los conceptos vistos y con una propuesta de tareas para su realización en casa.

Enmarque de la sesión:

En esta primera sesión introduciremos el tema. Es novedoso para el alumnado ya que no se ha visto en cursos anteriores. Debemos de elegir unas tareas para que el concepto y el significado de sucesión queden bien claro.

Secuenciación:

Tarea 1

Esta es la tabla de multiplicar hasta el 5:

x	1	2	3	4	5
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
2	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**
3	**3**	**6**	**9**	**12**	**15**
4	**4**	**8**	**12**	**16**	**20**
5	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**

Observa las filas y las columnas. Discute con tus compañeros las regularidades y relaciones que observes. Razona tu respuesta.

Duración: 10 min aprox.

Descripción sobre Gestión del aula: El profesor explica que nos podemos encontrar secuencias de números y regularidades numéricas que siguen un patrón. Encontrando ese patrón nos ayuda a su estudio. A continuación el profesor deja propuesta esta tarea para que la discutan en parejas.

Materiales y recursos: Papel y pizarra.

Descripción de la actuación del profesor: Después de realizar la tarea hemos motivado al alumnado introduciendo el concepto de sucesión intuitivamente. A continuación el profesor explica las sucesiones numéricas:

- Relaciones de secuencias de números.
- La terminología especifica de sucesiones: Sucesión, término, término enésimo, índice.
- La notación: Sucesión: (an) o también $a_1,a_{2,\ \ldots\ldots,}a_{n,\ldots.}$; termino enésimo: an; Término general: an= f(n); Índice: n "n€N   n≥1
- El profesor dejará claro los conceptos de término, término general e índice, ya que según vimos en limitaciones de aprendizaje, esto induce a errores y conlleva dificultades.
- Destacar que las sucesiones pueden ser finita e infinitas.

Duración de la explicación: 15 min aprox.

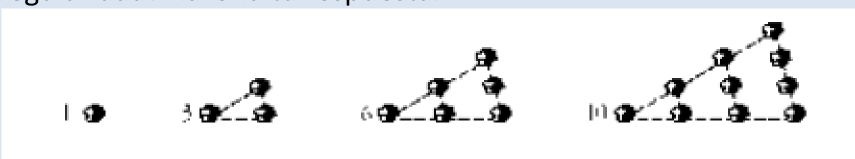
A continuación proponemos otra tarea para ver si han asimilado los conceptos.

Tarea 2

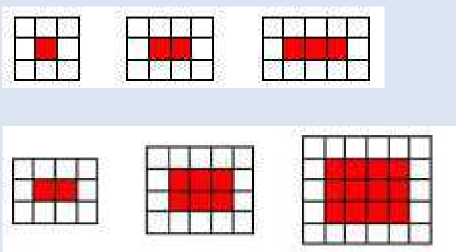
a) Completa las sucesiones con los términos que faltan y obtén la ley de recurrencia.

1) 15, 18, 21 24, ____, ____, ___
2) 200, 100, 50 , 25, ___, ___,____
3) 1, -2, -5, -8, ___, ___, ____
4) 1/5 ,1/10 , 1/20 , ___,___,___

b) Construye los dos siguientes triángulos y obtén el número de puntos. ¿Observas alguna regularidad? Razona tu respuesta.



c) Observa la serie de rectángulos



¿Cuántos cuadrados rojos tiene cada figura? ¿Y blancos? ¿Cuántos cuadrados rojos y cuántos blancos tendrá la figura que ocupa el lugar 22? ¿Y el lugar n?

Duración: 10 min aprox.

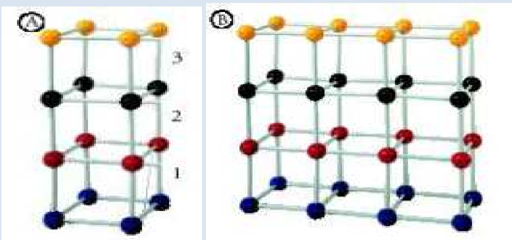
Descripción sobre Gestión del aula: El profesor copia la tarea en la pizarra y los alumnos la escriben en sus libretas. El trabajo será individual aunque se podrán discutir los diferentes puntos de vista del alumnado. El profesor intentará en la medida de lo posible no intervenir en la realización de los mismos para comprobar si el alumnado maneja el contenido o no.

Materiales y recursos: Pizarra o pizarra digital.

Descripción de la actuación del profesor: El propósito de esta tarea es conocer si el alumnado ha adquirido el concepto de sucesión y las regularidades que se nos pueden presentar en cualquier situación.
El profesor formulará algunas preguntas del tipo: ¿Cómo se obtiene cada término?, ¿sumando?, ¿Restando?, ¿Multiplicando?, ¿Sabrías escribir una notación precisa de cada término?
Duración de la explicación 15 min aprox.

Tarea 3 (Propuesta para realizar en casa)

1) Un arquitecto desea construir un edificio estable para los terremotos. Las maquetas que tenemos a continuación están hechas ha escala, donde los palos son los pilares y los bolas (puntos) unos sistemas para que amortigüen los terremotos. Cuando estaba construyéndolas se quedo sin palos y bolas (puntos). Averigua cuántos palos y cuántas bolas son necesarias para hacer una estructura como la de la figura A, pero de 10 pisos. ¿Y para la figura B?, ¿Sabrías encontrar una fórmula para n pisos?



2) Halla los tres términos siguientes de cada sucesión.

a) 12, 12, 12, 12, 12 …

b) 21, 23, 25, 27, 29 …

c) 80, 70, 60, 50, 40 …

d) 1/8 , 1/4 , 1/2 , 1, 2….

Descripción sobre Gestión del aula: Esta tarea se entregará en la siguiente sesión.

Materiales y recursos: Papel

Descripción de la actuación del profesor: El profesor pretende que los alumnos apliquen todo lo aprendido en clase. Con esta tarea motivaremos al alumnado llevándolos a la interrogación y al cuestionamiento. También construirán significados para la siguiente sesión.

SESIÓN 2: TÉRMINO GENERAL DE UNA SUCESIÓN. SUCESIONES RECURRENTES. OPERACIONES CON SUCESIONES. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE SUCESIONES.

Contenidos básicos: Término general de una sucesión. Sucesiones recurrentes. Suma y producto de sucesiones.

Situaciones: Educativa. Social
Sistemas de representación: Simbólica. Verbal. Gráfica y Numérica-Tabulada.
Expectativas de aprendizaje:
Las capacidades a desarrollar en esta sesión son:

1) Identificar regularidades en una secuencia de números.
2) Obtener el término general de una sucesión conocidos varios términos de la misma.
3) Reconocer sucesiones recurrentes.
6) Hallar la suma y multiplicación de sucesiones.
7) Hallar la multiplicación de un escalar con una sucesión.
5) Representar sucesiones gráficamente.

Las competencias PISA en las que vamos a trabajar son:

Pensar y razonar **(PR)**, Argumentar y justificar **(AJ)**, Comunicar (**C**), Modelizar **(M)**, Representar**(R)**, Lenguaje simbólico **(LS)**, herramientas tecnológicas **(HT).**

Intenciones de la planificación de la sesión:

En esta segunda sesión se pretende que el alumno/a profundice en el concepto de sucesión. Introduciremos las representaciones gráficas de sucesiones, los conceptos de sucesión recurrente y las operaciones que podemos hacer con las sucesiones. Se realizarán tareas para la construcción de significados, de aplicación y ejercitación.

Enmarque de la sesión:
Esta es la segunda sesión de la secuenciación. Los alumnos ya tienen cierta soltura en los conocimientos básicos necesarios en el tema puesto que se practicaron en la sesión anterior.
En esta sesión aumentará el grado de dificultad al introducir el término general de la sucesión y sucesiones recurrentes.

Secuenciación:

Tarea 1

1) Halla los cuatro primeros términos positivos de las sucesiones siguientes y trata de hallar mentalmente la fórmula del término general.
a) Números pares. b) Números impares.
c) Múltiplos de 5 d) Cubos perfectos.

2) Hallar los diez primeros términos de las siguientes sucesiones y obtener el término general. Representa gráficamente las siguientes sucesiones:
a) 3, 8, 13, 18… b) 8, 4, 0, – 4…
c) 2, – 2, 2, –2… d) 1/2, 1/4, 1/6, 1/8…

3) Calcula para cada sucesión los términos 6 y 20. Representa en una tabla y gráficamente el término general.

a) c_6 y c_{20} de $c_n = \frac{n-2}{n+1}$ b) $a_n = 3n + 2$

c) $d_n = n^2 - 2n + 1$ d) $b_n = 2n$

Observación: Los apartados b) y d) de cada ejercicio se realizarán en casa

Duración: 10 min aprox.

Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor copia en la pizarra la tarea y los alumnos/a la resuelve en parejas en su libreta. Al finalizar la tarea debatiremos los resultados. Con esta tarea se pretende repasar los conceptos de la sesión anterior. Se introduce el concepto de término general insistiendo en el gran uso te tiene y el trabajo que nos ahorra. También introducimos las representaciones gráficas de sucesiones, y destacamos lo que nos ayuda para interpretar los resultados en nuestra vida real.

La explicación durará 10 min.

Materiales y recursos: Pizarra o pizarra digital.

Tarea 2

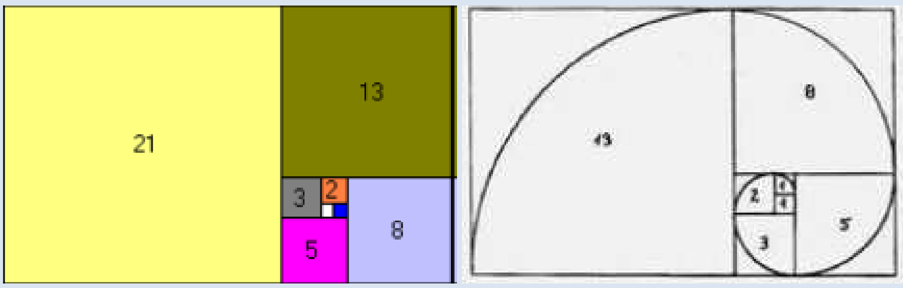
1) Observa estas figuras y contesta a las cuestiones. Las longitudes de los lados de los dos cuadrados iniciales son 1 (unidad arbitraria), luego se añade un cuadrado de lado 2, luego se añade uno de lado 3, luego uno de 5, luego uno de 8. Rápidamente se puede apreciar una espiral y esta espiral se corresponde a la del caparazón de un molusco.

a) Construye la sucesión recurrente de los lados.

b) ¿Conoces esta sucesión tan famosa?, ¿Cuál es su nombre?

c) Halla el valor del lado del siguiente cuadrado

d) Obtén la suma de los nueve lados de los cuadrados.



2) **a)** Busca una ley de recurrencia para definir las siguiente sucesión:

8, 10, 2, –8, –10, …

b) Construye la sucesión recurrente definida por:

$a_1 = -2$ $a_2 = 3$ $a_n = a_{n-1} + 5$

3) Dadas las sucesiones:

$(a_n) = (2, 4, 6, 8 \ldots)$ y $(b_n) = (2, 5, 8, 11 \ldots)$

Halla los cuatro primeros términos de estas sucesiones.

a) 3 (a_n) b) (a_n) +(b_n) c) (a_n) (b_n)

Duración: 15 min aprox.

Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor propone la tarea a la e irá siguiendo su realización dando respuesta a las cuestiones y dudas que se le planteen. Después se corregirá en clase. Se pretende con esta tarea que los alumnos/as observen la importancia de las sucesiones en nuestra naturaleza. Explicaré detenidamente el gran descubrimiento de fue la sucesión de Fibonacci y las grandes aplicaciones que tiene.

Materiales y recursos: Pizarra o pizarra digital. Papel.

Propongo esta tarea para casa, además de los apartados anteriores que también he dejado para casa.

Tarea 3 (Para realizar en casa)

1) Halla el término general de las siguientes sucesiones y representa gráficamente:

a) 5,9, 13, 17…. b) 3,3,3,3,……

b) Construye la sucesiones recurrentes dadas por:

1) a_1=2 a_n =a_{n-1}-4 2) b_1 =6 b_n=b_{n-1}+2

c) Realiza las operaciones siguientes de las sucesiones del apartado b) y represéntalas en una tabla y gráficamente:

1) -3(a_n) 2) 4(a_n)+(b_n) 3) (a_n) (b_n)

SESIÓN 3: PROGRESIONES ARITMÉTICAS. SUMA DE LOS N PRIMEROS TÉRMINOS. REPRESENTACION GRÁFICA. INTERPOLACIÓN ARITMÉTICA.

Contenidos básicos: Progresiones aritméticas. Diferencia. Término general de una progresión aritmética. Suma de los n primeros términos. Interpolación aritmética.

Situaciones: Personales. Educativas. Publicas.

Sistemas de representación: Simbólica. Verbal. Gráfica.

Expectativas de aprendizaje:

Las capacidades a desarrollar en esta sesión son:

1) Identificar regularidades en una secuencia de números.

2) Obtener el término general de una sucesión conocidos varios términos de la misma.

3) Identificar progresiones aritméticas y geométricas.

5) Representar sucesiones gráficamente.
8) Obtener la suma de los n primeros términos consecutivos de una progresión.
9) Obtener la suma de los n primeros términos consecutivos de una sucesión.
10) Identificar sucesiones en nuestro entorno.
11) Expresar algún problema de la vida cotidiana en forma de sucesión.

En esta sesión trabajaremos con las competencias matemáticas PISA:
Pensar y razonar **(PR)**, Argumentar y justificar **(AJ)**, Comunicar (**C**), Modelizar **(M)**, Representar**(R)**, Lenguaje simbólico **(LS)**, herramientas tecnológicas **(HT).**

Intenciones de la planificación de la sesión:
En esta sesión introduciremos el concepto de progresión aritmética como una sucesión en la que cada término, excepto el primer, se obtiene sumando una cantidad constante, llamada diferencia, al término anterior. Dejaremos ver que la suma de progresiones aritméticas se usa casi diariamente en nuestras vidas. Y por último averiguaremos, que dados dos números, como se intercalan una cantidad de números que formen con ellos una progresión aritmética.

Enmarque de la sesión:
Estamos en la tercera sesión y los alumnos están familiarizados con las secuencias de números y las repercusiones que tienen en los contextos y situaciones que nos rodean. Las representaciones simbólicas y verbales serán reforzadas.

Secuenciación:

Tarea 1
Al comienzo del año, uno de vosotros decide ahorrar para comprarse un móvil de última generación que cuesta 200 euros. En enero metéis en una hucha 10 euros y cada mes introducís la misma cantidad que el mes anterior y 1 euro más.
¿Podríais obtener la diferencia y el término general?, ¿Cómo se llama esta progresión?, ¿Cuánto dinero habréis ahorrado cuando llegue noche vieja?, ¿Tenéis que pedirle dinero a vuestros padres?, si es así, ¿Qué cantidad? Razona tu respuesta.

Duración: 5 min aprox.
Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor escribe en la pizarra la tarea y el alumno la escribe en su libreta. Se realizará en grupos de cuatro. En esta tarea pretendo motivar y fomentar el cuestionamiento de los escolares para introducir progresiones aritméticas y su suma.
Materiales y recursos: Pizarra. Libreta.

Tarea 2
1) Calcula el término general, la diferencia y a_{12} de una progresión aritmética sabiendo que $a_1=3$ y $a_2=1.25$
2) Halla el primer término y el término general de las siguientes progresiones aritméticas:
a) $d = 5$; $a_8 = 37$ b) $a_{11} = 17$; $d = 2$

3) Calca la suma de los veinte primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $a_1 = 5$; $d = 2$ b) $a_1 = -1$; $a_2 = -7$ c) Los números pares. d) Los múltiplos de 3.

Duración: 5 min aprox.
Descripción de la interacción y gestión del aula: Esta tarea viene en el libro y no necesitan que la copien en la libreta. Se realizará individualmente y mi objetivo es conocer si han captado los conocimientos anteriores. Con estos ejercicios ejercitarán término general, diferencia y suma de progresiones aritméticas. Escribiré las formulas en la pizarra y haré un resumen.
Materiales y recursos: Libro. Libreta.

Tarea 4 (Para realizar en casa)

1) Este verano vas a pasar 15 días con tu abuelo y se pone a tu llegada. Vais al medico y le dice que tiene que tomar un medicamento con las siguientes dosis: El primer día 100 mg y 5 mg menos cada uno de los siguientes. El tratamiento dura 15 días. ¿Cuántos miligramos tiene que tomar el tercer día? ¿Y cuantos miligramos tiene que tomar durante todo el tratamiento?
2) Interpola cinco medios aritméticos (buscar en internet medios aritméticos) entre los números

a) -10 y 26 b) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$

Descripción de la interacción y gestión del aula: Se entregará en la siguiente sesión y se corregirá. El profesor pretende que los alumnos apliquen todos los aprendizajes a la vida cotidiana. Para el ejercicio número 2, antes de salir de clase le hago la siguiente observación: calcular la distancia. Permito al alumno adquirir nuevos conocimientos mediante el descubrimiento, en este caso, la interpolación aritmética.
Materiales y recursos: Ninguna específico.

SESIÓN 4: PROGRESIONES GEOMÉTRICAS. SUMA DE LOS N PRIMEROS TÉRMINOS. INTERPOLACIÓN GEOMÉTRICA. CÁLCULO DE FRACCIONES GENERATRICES MEDIANTE PROGRESIONES GEOMÉTRICAS.

Contenidos básicos: Progresiones geométricas. Razón. Término general de una progresión geométrica. Suma de los n primeros términos. Interpolación aritmética.

Situaciones: Personales. Educativas. Públicas.

Sistemas de representación: Simbólica. Verbal. Grafica y Numérica-Tabulada.
Expectativas de aprendizaje:

Las capacidades a desarrollar en esta sesión son:
1) Identificar regularidades en una secuencia de números.
2) Obtener el término general de una sucesión conocidos varios términos de la misma.

3) Identificar progresiones aritméticas y geométricas.
5) Representar sucesiones gráficamente.
8) Obtener la suma de los n primeros términos consecutivos de una progresión.
11) Expresar algún problema de la vida cotidiana en forma de sucesión.

Las competencias PISA en las que vamos a trabajar son:

Pensar y razonar **(PR)**, Argumentar y justificar **(AJ)**, Comunicar (**C**), Modelizar **(M)**, Representar**(R)**, Lenguaje simbolico **(LS)**, herramientas tecnológicas **(HT).**

Intenciones de la planificación de la sesión:
En esta sesión introduciremos el concepto de progresión geométrica como una sucesión de números racionales en la que cada término se obtiene multiplicando por una cantidad constante o fija, llamada razón, al término anterior. Explicaremos la diferencia entre progresiones aritméticas y geométricas, comparando sus términos generales y sus representaciones. Al igual que las progresiones geométricas, la suma de progresiones geométricas se usa casi diariamente en nuestras vidas. También relacionaremos las progresiones geométricas con las ecuaciones. Y por último averiguaremos, que dados dos números, como se intercalan una cantidad de números que formen con ellos una progresión geométrica.

Enmarque de la sesión:

Estamos en la cuarta sesión y los alumnos ya conocen las progresiones aritméticas y las sucesiones y las repercusiones que tienen en nuestra sociedad y vida diaria. Las utilizaremos para introducir los nuevos conocimientos de progresiones geométricas.

Secuenciación:

Tarea 1
Una máquina costó inicialmente 10 480 €. Al cabo de unos años se vendió a la mitad de su precio. Pasados unos años, volvió a venderse por la mitad, y así sucesivamente.
a) ¿Cuánto le costó la máquina al quinto propietario?
b) Si el total de propietarios ha sido 7, ¿cuál es la suma total pagada por esa máquina?

Duración: 5 min aprox.
Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor escribe en la pizarra la tarea y los alumnos la copian en sus libretas. El profesor comenta que hay progresiones en las que los términos siguientes se obtienen multiplicando por el anterior una cantidad. Deja unos minutos y ve los resultados que han obtenido. Se pretende que los alumnos introduzcan por ellos mismos el concepto de progresión geométrica.
Materiales y recursos: Pizarra y papel.

Tarea 2
De las siguientes sucesiones, señala cuáles son progresiones aritméticas, geométricas y las que no son progresiones. Determina en cada caso la constante, el término genera y la suma de los 5 primeros términos.
a) 2, -6, 18, -54……

b) $2, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$
c) 0,2; 0,02; 0,002; …
c)3.5, 4.75, 6, 7.25…..

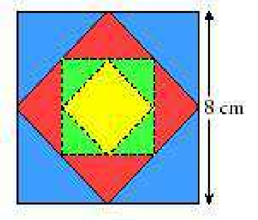
Duración: 5 min aprox.
Descripción de la interacción y gestión del aula: Con los resultados obtenidos de la tarea anterior, el profesor extrae conclusiones de los conocimientos que pueden tener el alumnado sobre progresiones geométricas. Si no ha conseguido el resultado esperado, las explica. También, preguntando al alumnado, resume las progresiones aritméticas y sucesiones de forma oral.
Materiales y recurso: Pizarra y papel.

Tarea 3
a) Hallar el valor de **x** para que **x-1, x+2 y 10x-4** formen una progresión geométrica.
b) Desafío matemático. Calcula la fracción generatriz del siguiente número decimal periódico puro: 0.181818……
¿Qué estrategia has seguido?
Sugerencia: El numero se puede escribir N=0.18+0.0018+0.000018

Duración: 10 min aprox.
Descripción de la interacción y gestión del aula: Se copian la tarea en el folio y el profesor deja unos minutos para que investiguen y obtengan conclusiones. Si los resultados no son aceptables, el docente los explica en la pizarra. Se pretende relacionar las ecuaciones y fracción generatriz con las progresiones geométricas. La complejidad de la tarea es de reflexión.
Materiales y recursos: Pizarra y Papel.
Resolución tarea 3 b): Calcula la fracción generatriz del siguiente número decimal periódico puro: 0.181818……
N=0.18+0.0018+0.000018 de donde obtenemos: N=$\frac{18}{100} + \frac{18}{10000} + \frac{18}{1000000}$+…..→
N=$\frac{18}{100} + \frac{18}{100^2} + \frac{18}{100^3}$+… Observamos que se trata de la suma de una progresión geométrica de infinitos términos con $a_1=\frac{18}{100}$ y $r=\frac{1}{100}$ Como |n|<1 podemos aplicar la formula de la suma de los términos de una progresión geométrica:

$$N=\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{18}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{18}{99}\ de\ donde\ N = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$$

Tarea 4
1) Halla cuatro números en progresión geométrica sabiendo, que la suma de los dos primeros términos es 28 y la suma de los dos últimos 175.
2) Observa los diferentes cuadrados que hay en esta figura. Se han obtenido uniendo los puntos medios de dos lados contiguos:
a) Halla las áreas de los seis primeros cuadrados de esta sucesión. ¿Cuál será su término general?
b) Escribe la sucesión formada por las longitudes de los lados.
c) Calcula la suma de las áreas de los infinitos cuadrados generados de esa forma.



3) Interpolar *m* números entre dos números dados cualesquiera es hallar los *m* términos intermedios de una progresión geométrica cuyo primer y último término son los números dados. Interpola dos medios proporcionales entre 1 y 16.

Descripción de la interacción y gestión del aula: La tarea se entregará al día siguiente y será evaluada. Las preguntas de esta tarea son situaciones que requieren que el estudiante puede establecer relaciones entre distintos dominios matemáticos (conexión).

SESIÓN 5: RECURSOS INFORMÁTICOS. PRÁCTICAS DE ORDENADOR CON “MATHEMATICA”. REPRESENTACIÓN GRÁFICA. SUCESIONES, PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS.

Contenidos básicos: Sucesiones numéricas, Progresiones aritméticas, Progresiones geométricas, Suma de n términos consecutivos.
Situaciones: Educativa
Sistemas de representación: Gráfica. Simbólica. Uso del software “Mathematica”.
Expectativas de aprendizaje:

Esta sesión es de repaso usando el programa informático: “Mathematica”. Por lo tanto se contribuirá a la mayoría de las expectativas.

Las competencias PISA matemáticas serán:
PR: Pensar y Razonar**; AJ:** Argumentar y Justificar**; R:** Representar**; LS:** Lenguaje Simbólico;
HT: Emplear Soportes y Herramientas Tecnológicas**.**

Intenciones de la planificación de la sesión:

La tarea se desarrollará explicando el profesor los comandos para el uso del programa. El profesor realizará la tarea y los alumnos lo irán siguiendo en su ordenador. Una vez finalizado la explicación, los alumnos empezarán a realizar una tarea propuesta, la cual será entregada al profesor en soporte digital o bien vía correo electrónico. La tarea se evaluará por el profesor como han comprendido y usado el programa.

Enmarque de la sesión:

Con esta sesión los alumnos observarán que los cálculos se realizan más rápidos, y sobre todo, nos ahorrarán mucho tiempo. Se aplicará un aprendizaje constructivo.

En esta tarea se repasarán los conceptos del tema, pero vía programa informático.

Secuenciación:

La tarea consistirá en la realización de ejercicios hechos en clase y otros propuestos. El alumno reflexionará sobre las dos formas de resolver problemas.

Tarea
1) Dadas las sucesiones:
$(a_n) = (2, 4, 6, 8 \ldots)$ y $(b_n) = (2, 5, 8, 11 \ldots)$

Halla los cuatro primeros términos de estas sucesiones y represéntalos gráficamente.

a) 3 (a_n) b) (a_n) +(b_n) c) (a_n) (b_n)

2) Dadas las sucesiones siguientes: $a_n = 3n + 2$ $b_n = 3$ $d_n = n^2 - 2n + 1$

Realiza las siguientes operaciones y represéntalas gráficamente:

a) (a_n) + (b_n) (a_n) (b_n) 3 (b_n) (b_n) - (a_n)

3) Calcula la suma de los veinte primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas y represéntalas gráficamente:

a) $a_1 = 5$; $d = 2$ b) $a_1 = –1$; $a_2 = –7$ c) Los números pares. d) Los múltiplos de 3.

4) Un coche pierde cada año el 5% de su valor. En el momento de su compra valía 13 000 €.

a) ¿Cuánto valía un año después de comprarla? ¿Y dos años después?

b) ¿En cuánto se valorará 10 años después de haberla adquirido?

PRÁCTICA CON ORDENADOR. SUCESIONES. PROGRESIONES ARITMETICAS Y GEOMETRICAS

Término general:

Consideremos la siguiente sucesión conocida de números impares:

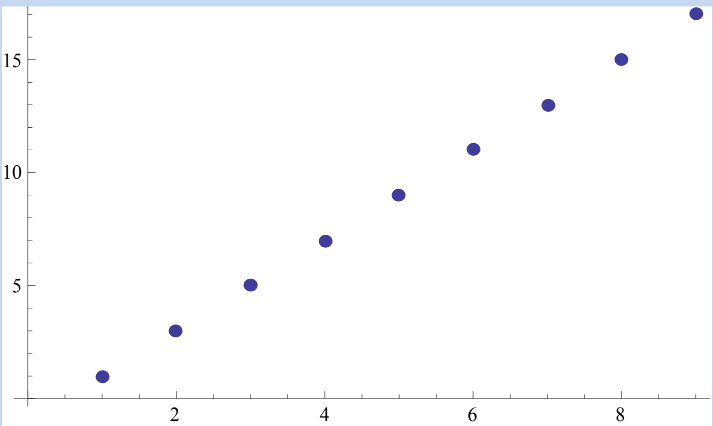
a_n=2n-1 con n≥1

Aplicamos los comandos

```
a[n_]:=2n-1

Puntos=Table[{n,a[n]},{n,1,9,1}]
{{1,1},{2,3},{3,5},{4,7},{5,9},{6,11},{7,13},{8,15},{9,17}}

G1=ListPlot[Puntos,PlotStyle→PointSize[0.02]]
```



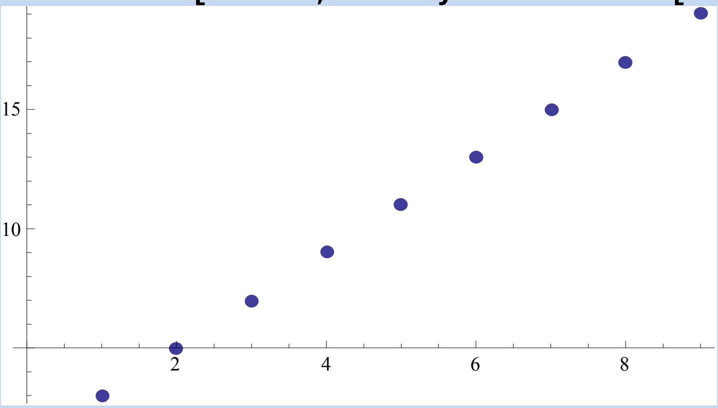
Suma y producto de sucesiones:

```
Clear["Global`*"]
a[n_]:=2 n-1
-1+2n
b[n_]:= n+1
1+n
suma[n]=a[n]+b[n]
3n
```

Progresiones aritméticas: Supongamos esta sucesión: a_n=3+(n-1)2

Observación: Tenemos que asignar la diferencia y el primer término.

```
d=2;
a[1]=3;
a[n_Integer]=a[1]+d*(n-1)
3+2 (-1+n)
Puntos=Table[{n,a[n]},{n,1,9,1}]
{{1,3},{2,5},{3,7},{4,9},{5,11},{6,13},{7,15},{8,17},{9,19}}
G2=ListPlot[Puntos,PlotStyle→PointSize[0.02]]
```



Calculamos la suma de términos consecutivos de una progresión aritmética.

S[n_]= n $\frac{(a[n]+a[n])}{2}$

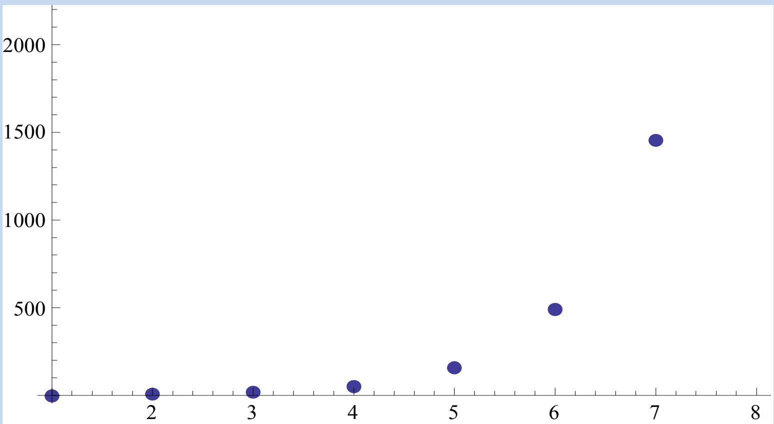
```
1/2 n (3+a[n])
```

Podemos sumar los términos consecutivos que queramos de a[n], por ejemplo 7

```
S[7]
63
```

Progresiones geométricas: Asignamos la razón, el primer término y comandamos.

```
r=3;
a[1]=2;
a[n_Integer]=a[1] r^(n-1
2 3^(-1+n)
Puntos=Table[{n,a[n]},{n,1,8,1}]
{{1,2},{2,6},{3,18},{4,54},{5,162},{6,486},{7,1458},{8,4374}}
G2=ListPlot[Puntos,PlotStyle→PointSize[0.02]]
```



Calculamos la suma de términos consecutivos de una progresión aritmética y la suma de los 7 primeros términos.

S[n_]=$\frac{a[1](r^n-1)}{r-1}$

$-1+3^n$

S[7]

2186

SESIÓN 6: TRABAJOS EN GRUPOS. DUDAS INDIVIDUALES. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Contenidos básicos: Término, término general. Progresiones aritméticas y geométricas. Suma de los n primeros términos de una progresión. Diferencia. Razón.
Situaciones: Educativa
Sistemas de representación: Simbólica. Verbal. Grafica.
Expectativas de aprendizaje:

Se desarrollarán las siguientes capacidades:

3) Identificar progresiones aritméticas y geométricas.
10) Identificar sucesiones en nuestro entorno.
11) Expresar algún problema de la vida cotidiana en forma de sucesión.

Las competencias PISA a las que contribuye es sesión serán:

PR: Pensar y Razonar**; AJ:** Argumentar y Justificar**; C:** Comunicar**; M:** Modelizar**;**
RP: Plantear y Resolver Problemas**.**
Intenciones de la planificación de la sesión: En esta sesión grupal se pretenden que los alumnos diferencien las progresiones aritméticas y geométricas, su actuación en nuestro entorno y relacionar con otros temas de matemáticas. También se observará la capacidad de trabajo en grupo y el intercambio de conocimientos. Con esta sesión contribuiremos a las competencias básicas: Conocimiento e interacción con el mundo físico, Cultural y artística, Comunicación lingüística y Aprender a aprender.

Enmarque de la sesión:
En esta sesión el alumno maneja las sucesiones y progresiones con habilidad para su utilidad en cualquier situación. Resolveremos dudas individuales y trabajaremos en grupo para realizar cualquier problema relacionado con el tema.

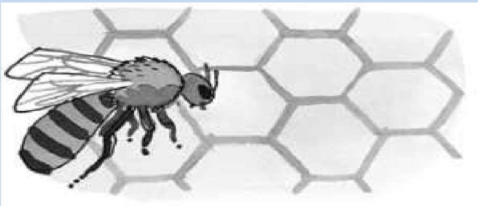
Secuenciación:

Tarea 1
Las abejas construyen panales con formas hexagonales. El segundo hexágono que construyen lo

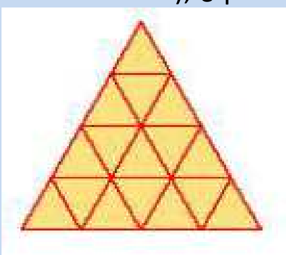
hacen utilizando un lado del primero. A partir del tercer hexágono, lo construyen utilizando siempre dos lados de hexágonos ya construidos.
Si se entiende como unidad de cera la cantidad de este material necesaria para construir un lado de un hexágono, se verificará que:

- Para construir un panal de una celda se necesitan 6 unidades de cera.
- Para construir un panal de dos celdas se necesitan 11 unidades de cera.
- Para construir un panal de tres celdas se necesitan 15 unidades de cera.

¿Cuántas celdas tendrán un panal que precisa de 51 unidades de cera para su construcción?
Interpreta el resultado y resuelve.



Tarea 2
Dibuja un triángulo equilátero de 16 cm de lado. Une los puntos medios de sus lados. ¿Cuántos triángulos obtienes? ¿Cuánto miden sus lados?
En estos triángulos, vuelve a unir los puntos medios, y así sucesivamente.
Escribe las siguientes sucesiones:
a) Número de triángulos que tienes cada vez.
b) Longitudes de los lados de esos triángulos.
c) Áreas de los triángulos.
d) Si multiplicas cada término de la sucesión obtenida en a) por el correspondiente de la sucesión obtenida en c), ¿qué obtienes?



Duración: 30 min
Descripción de la interacción y gestión del aula: Las tareas se entregaran en un papel**.** Se divide la clase en 4 grupos, dos de ellos trabajarán con la tarea 1 y los otros dos con la tarea 2. Construirán un panel de abeja de celdas y triángulos como se describe en tarea. Al finalizar la tarea se corregirá y los grupos de una tarea explicarán a los otros su tarea y viceversa. Los distintos grupos se evaluarán y pondrán una calificación. También se resolverán dudas individuales
Materiales y recursos: Papel, palillos y pegamento.

SESIÓN 7: PRUEBA ESCRITA

Durante los 55 minutos que dura esta sesión se va a proceder a evaluar a los alumnos con una prueba escrita. Un ejemplo de este tipo de prueba puede verse en el **anexo I.**

5 CONCLUSIONES

Consideramos que en los últimos años la enseñanza ha estado y está en la actualidad sometida a muchos cambios. El cambio en la actitud del alumnado hace que las propuestas didácticas tengan que ser más motivadoras además hay que sumarle la aparición de las nuevas tecnologías y su uso en las aulas.

La propuesta de unidad didáctica que hemos realizamos es un modelo de enseñanza y aprendizaje que se apoya en las nuevas tecnologías y en la importancia de la fenomenología de para mantener la motivación del alumnado. Esto influye en las tareas prácticas con actividades y metodología que facilitan el aprendizaje mediante el trabajo en grupo para analizar y tomar decisiones.

He intentado relacionar las sucesiones con otros temas e interrelacionar con otros para profundidad en el nuestro, para así, conseguir una visión global y una estructura general de la matemática para entender el conocimiento como un todo y la utilidad de poseer saberes previos para afrontar el aprendizaje de los nuevos.

Para la elaboración de la unidad didáctica ha sido imprescindible toda la información recogida en el análisis didáctico del tema y la experiencia adquirida de prácticas. Pienso que este trabajo se puede llevar a las aulas porque ha nacido de la depuración del trabajo de unos profesionales indiscutible que son los profesores y mis compañeros.

Quiero destacar también la evaluación que he propuesto, dándoles así más oportunidades a nuestros alumnos e intentando mantener su motivación a lo largo del tema.

Como conclusión final, valoro positivamente la formación adquirida en el máster sobre todo en prácticas donde tuve la oportunidad de aplicar todos los conocimientos adquiridos a lo largo del Máster. Espero que a través de este trabajo fin de máster sea un reflejo de los conocimientos y competencias que he adquirido.

6 BIBLIOGRAFÍA

LIBROS

SM 3º matemáticas (Vizmanos, Anzola)

McGrawHill (Begoña Martinez, Montesinos Comino, López Bote)

KLINE Morris, *El pensamiento matematico de la Antiguedad a nuestros días, I.,*
Alianza Editorial, Madrid, 1992.

RICO, Luis, MARIN Antonio, LUPIANEZ José Luis, GOMEZ Pedro. *Planificación de las Matemáticas Escolares en Secundaria. El caso de los Números Naturales.* Revista
Suma, Junio 2008, pp. 1-16.

ORDEN ESD/1729/2008, de 11 de junio, por la que se regula la ordenación y se establece el currículo del bachillerato y ORDEN de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía.

http://es.wikipedia.org/wiki/Historia_de_la_mat.
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Sucesiones_progresiones/index.htm

7 ANEXOS

ANEXO 1: MODELO DE PRUEBA ESCRITA

Ejercicio 1

En el año 1986 fue visto el cometa *Halley* desde la Tierra, a la que se acerca cada 76 años. Esta era la cuarta vez que nos visitaba desde que el astrónomo Halley lo descubrió.

a) ¿En qué año fue descubierto?

b) ¿Cuándo será visto en el siglo XXI?

Ejercicio 2

Calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que están en progresión aritmética y que el menor de ellos mide 6 cm

Ejercicio 3

De un vaso lleno de leche se vacía la mitad y se rellena de agua. Se retira la mitad del nuevo contenido y se vuelve a rellenar con agua. Si este proceso se repite seis veces, ¿qué parte de agua contiene el vaso?

Ejercicio 4

Halla, en cada caso, el término general y calcula, después, a_{30} , represéntalas gráficamente.

a) 25, 18, 11, 4, …

b) –13, –11, –9, –7, …

c) 1,4; 1,9; 2,4; 2,9; …

d) –3, –8, –13, –18,

Ejercicio 5

a) Si en una progresión aritmética sabemos que $a_2 + a_{13} = 32$; ¿podemos saber cuánto vale $a_8 + a_7$? ¿Por qué?

b) Halla el valor de x para que **x+1, 3x, 5x + 2** formen una progresión geométrica. Determina la razón.

Ejercicio 6

A Isabel y Santiago, a las nueve de la mañana, les han contado un secreto con la advertencia de que no se lo cuenten a nadie. Cada uno de ellos, al cuarto de hora, se lo han contado solamente a tres amigos; por supuesto, de toda confianza. Un cuarto de hora después, cada uno se lo ha contado a otros tres amigos. Estos, a su vez, lo volvieron a contar a otros tres. Y así sucesivamente cada cuarto de hora. ¿Cuánta gente conocía el riguroso secreto a la hora de almorzar?